Mémoire présenté à CY Cergy Paris Université pour l'obtention du

DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : Mathématiques

par

Louis IOOS

Applications géométriques de la quantification de Berezin-Toeplitz

---

Soutenu le 26 mars 2025 devant le jury composé de :

Vestislav APOSTOLOV	Université du Québec à Montréal	Examinateur
Jean-Michel BISMUT	Université Paris-Saclay	Rapporteur
Bertrand DEROIN	CY Cergy Paris Université	Examinateur
Éveline LEGENDRE	Université Claude Bernard Lyon 1	Présidente
Paul-Émile PARADAN	Université de Montpellier	Rapporteur
Armen SHIRIKYAN	CY Cergy Paris Université	Examinateur

D'après les rapports de Jean-Michel BISMUT, Paul-Émile PARADAN et :

Simon DONALDSON	Imperial College London	Rapporteur

CY Cergy Paris Université
Laboratoire AGM, UMR 8088,
2 avenue Adolphe Chauvin
95302 Cergy-Pontoise Cedex

Remerciements

Mes remerciements vont en premier lieu à Jean-Michel Bismut, Simon Donaldson et Paul-Émile Paradan, qui ont accepté de consacrer leur temps à écrire les rapports pour ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Chacun d'entre eux ont joué un rôle déterminant dans mon parcours de chercheur, à travers leur attention portée à mes travaux ainsi qu'à travers leur propre recherche, qui a largement constitué le sujet de la mienne. C'est un honneur et une fierté de les compter parmi les premiers juges de ce mémoire.

J'aimerais également remercier Armen Shirikyan et Bertrand Deroin, qui ont accepté d'être respectivement référent et garant de mon habilitation auprès de l'Université de Cergy. Le chaleureux accueil qu'ils m'ont réservé à mon arrivé à Cergy, ainsi que leur soutien sans faille depuis, ont largement contribué à créer les meilleures conditions pour ma recherche au sein du laboratoire. Je suis tout aussi reconnaissant envers les autres membres du jury, Vestislav Apostolov et Éveline Legendre, ainsi que Julien Keller, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux et pour leur attention tout au long du processus qui a mené à cette habilitation, mais aussi plus généralement pour leur soutien constant depuis notre rencontre. Leurs conseils ont été précieux et les idées qu'ils ont accepté de partager avec moi un atout décisif pour ma recherche. Je les en remercie chaleureusement, et j'espère que le contact que nous avons construit ainsi perdure tout au long de nos carrières respectives. J'en profite pour remercier mon directeur de thèse, Xiaonan Ma, à qui toutes ces remarques s'appliquent au centuple et sans qui je n'aurais jamais pu imaginer en arriver jusque là.

Je tiens aussi à remercier tous mes collègues de l'Université de Cergy pour leur formidable accueil, ainsi que toutes celles et ceux avec qui j'ai pu échanger sur des questions de mathématiques et collaborer sur des projets passés ou futurs, en espérant que nous pourrons continuer à cultiver ensemble ces liens qui font la joie de ma vie de mathématicien. Cette page est bien trop courte pour contenir les noms de tous ceux qui m'ont appris tout ce qui s'est condensé en ce mémoire, et j'espère pouvoir transmettre autant qu'eux m'ont transmis. Je remercie aussi ma famille, qui a toujours été là pour moi et qui n'a jamais eu de cesse de me fournir tous les moyens possible pour me mener là où j'en suis aujourd'hui.

Enfin, si je dois retenir une seule chose de tout ce que les mathématiques m'ont apporté, c'est de m'avoir permis de rencontrer Nicolina, dont la présence à mes côtés durant toutes ces années signifie bien plus pour moi que tout ce que ce mémoire peut représenter.

AVANT-PROPOS

L'objectif de ce mémoire est de présenter mes contributions à la quantification de Berezin-Toeplitz, ainsi qu'à ses applications en géométrie symplectique et Kählerienne, en topologie de basse dimension et en théorie des représentations.

Dans le Chapitre 1, j'introduis la correspondance classique-quantique pour la quantification de Berezin-Toeplitz des variétés Kähleriennes compactes, suivant une approche initialement dûe à Bordemann, Meinreken et Schlichenmaier dans [16, 85] et basée sur le développement asymptotique du *noyau de Szegö* établi par Boutet de Monvel et Sjöstrand dans [22] et la théorie des *structures de Toeplitz* développée par Boutet de Monvel et Guillemin dans [21]. J'introduis ensuite le résultat fondamental de Dai, Liu et Ma dans [33] sur le développement asymptotique du *noyau de Bergman* via les techniques de *localisation analytique* de Bismut et Lebeau dans [15]. Ce résultat permet une approche alternative de la quantification de Berezin-Toeplitz, développée par Ma et Marinescu dans [71], et c'est cette approche qui sera suivie dans tout ce mémoire. J'introduis de plus le point de vue de la mesure quantique sur la quantification de Berezin-Toeplitz initié par Polterovich dans [80], ainsi que les liens étroits avec le procédé de quantification géométrique dû à Kostant dans [62] et Souriau dans [89].

Dans le Chapitre 2, j'introduis le cadre général pour la quantification de Berezin-Toeplitz développé par Ma et Marinescu dans [71], qui permet de traiter le cas des fibrés vectoriels sur des variétés orbifoldes et non-compactes, ainsi que le cas non-Kählerien. Je présente en particulier la réinterprétation que nous en faisons avec Polterovich dans [K] en terme de *quantification par étape des fibrations symplectiques*. Je décris ensuite mon résultat en collaboration avec Lu, Ma et Marinescu dans [B] sur la correspondance classique-quantique dans le cas non-Kählerien, à la suite des travaux de Boutet de Monvel et Guillemin dans [21, 46], Schiffman et Zelditch dans [88], Borthwick et Uribe dans [19] et Charles dans [30], qui sont tous fondés sur la théorie de Boutet de Monvel et Sjöstrand dans [22]. Je décris ensuite les cas d'intérêts géométriques cruciaux de la quantification des fibrés vectoriels.

Dans le Chapitre 3, je décris mes résultats sur la quantification des applications symplectiques au moyen d'un transport parallèle le long de chemins de structures complexes, suivant une approche initialement dûe à Hitchin dans [54]. J'énonce alors mon résultat principal dans [G], qui exprime ce transport parallèle en termes de la quantification de Berezin-Toeplitz en étendant la théorie de Ma et Marinescu dans [71] à ce cadre. Je décris ensuite les applications à la quantification des flots hamiltoniens, et en particulier mes résultats dans [C], où j'établis une *formule des traces semi-classique* pour la quantification géométrique, à la suite des travaux de Boutet de Monvel et Guillemin dans [21] et Borthwick, Paul et Uribe dans [18] pour la quantification de Berezin-Toeplitz. Je décris enfin les applications à la *Conjecture Asymptotique de Witten* [98], d'après mon résultat dans [G] sur l'estimée asymptotique de la trace des *représentations quantiques des groupes modulaires de surfaces*, à la suite des travaux de Jeffrey dans [56], puis d'Andersen dans [2] et de Charles dans [29].

Dans le Chapitre 4, je décris mes résultats en collaboration avec Kaminker, Polterovich et Shmoish dans [D] sur le trou spectral de la *transformée de Berezin*, qui mesure le bruit quantique introduit par la quantification de Berezin-Toeplitz, puis j'en décris les applications à la convergence exponentielle des itérations du système dynamique introduit par Donaldson dans [38] pour approcher numériquement les métriques canoniques sur les variétés Kähleriennes. En particulier, j'énonce mon résultat dans [I] où je calcule ce taux de convergence dans le cas des métriques de *Kähler-Einstein*. Je décris enfin mes résultats dans [J], où j'applique ce point de vue aux travaux de Donaldson dans [36] sur la quantification des métriques de Kähler à *courbure scalaire constante*, étendant ces résultats aux *solitons de Kähler-Ricci* à la suite des travaux de Berman et Witt-Nyström dans [11] et Takahashi dans [90], donnant ainsi une nouvelle preuve du résultat d'unicité de Tian et Zhu dans [93, 94].

Dans le Chapitre 5, je décris l'approche axiomatique de la quantification des variétés symplectiques compactes que nous avons développé avec Kazhdan et Polterovich dans [E, H], et dont la quantification de Berezin-Toeplitz est un exemple particulier. Je présente d'abord notre résultat dans [E], où l'on décrit le lien entre structures presque complexes et quantifications, puis je présente ensuite notre résultat dans [H], où nous montrons que les quantifications de la sphère et du tore sont toutes semi-classiquement équivalentes, en réinterprétant ce problème comme un problème de *quasi-représentations d'algèbres* en un sens inspiré de Kazhdan dans [59].

Dans le Chapitre 6, j'introduis la notion d'état quantique associé à une sous-variété isotrope, puis je décris mes résultats dans [F], où j'applique la théorie de Ma et Marinescu dans [71] au calcul asymptotique du produit hermitien de deux tels états en terme de l'intersection des sous-variétés correspondantes, à la suite des résultats de Borthwick, Paul et Uribe dans [17] et de Charles dans [25]. J'en décris ensuite les applications aux séries de Poincaré relatives que j'ai obtenu dans [F], étendant les résultats correspondants de Borthwick, Paul et Uribe dans [17] aux surfaces orbifoldes et non-compactes ainsi qu'aux espaces symmétriques hermitiens généraux. Je présente enfin les applications que j'ai obtenu dans [L], où je montre comment calculer les asymptotiques des représentations irréductibles du groupe unitaire dans les bases dites de *Gelfand-Zetlin*, à travers un système intégrable introduit par Guillemin et Sternberg dans [50] sur les orbites coadjointes du groupe unitaire.

Pour finir, je souhaite également mentionner mon travail en collaboration avec Delarue et Ramacher dans [55], qui ne porte pas sur la quantification de Berezin-Toeplitz et qui ne sera donc pas traité dans ce mémoire. Nous y établissons une formule de Hirzebruch-Riemann-Roch S^1-invariante pour les actions hamiltoniennes singulières du cercle, raffinant le principe de Quantification commute à la Réduction énoncé par Guillemin et Sternberg dans [49], et établi dans le cadre singulier par Meinrenken et Sjamaar dans [76], puis par Zhang dans [101] ainsi que Paradan dans [78].

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Étant donné un espace de phases en mécanique classique, qui est la théorie physique décrivant la nature à l'échelle humaine, l'objectif de la *quantification* est de lui associer de manière naturelle un espace de Hilbert en mécanique quantique, qui est la théorie physique décrivant la nature à l'échelle atomique, de telle sorte que la dynamique quantique induise la dynamique classique lorsqu'on la regarde à grande échelle. En particulier, un procédé de quantification doit envoyer les *observables classiques*, représentées par des fonctions lisses sur l'espace de phases classiques, sur des *observables quantiques*, représentées par des opérateurs hermitiens agissant sur l'espace de Hilbert d'états quantiques associé, de sorte qu'elles se correspondent à la *limite semi-classique*, lorsque le *quantum d'action* $\hbar > 0$ devient si petit que l'on retrouve les lois de la mécanique classique à partir des lois de la mécanique quantique.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons au cas où l'espace des phases est représenté par une variété symplectique compacte (X, ω). Dans ce contexte, l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_p$ d'états quantiques associé est de dimension finie, et dépend d'un paramètre entier $p \in \mathbb{N}$ comptant le nombre de quantum d'actions associés au système, de sorte qu'on a $\hbar \sim (2\pi p)^{-1}$ et que la limite semi-classique coïncide avec la limite $p \to +\infty$. La *quantification de Berezin-Toeplitz*, ainsi que ses variantes géométriques, consiste alors en une application linéaire $T_p : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ envoyant les observables classiques sur les observables quantiques pour chaque $p \in \mathbb{N}$, et satisfaisant les axiomes fondamentaux attendus pour une quantification à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$, regroupés sous le nom de *correspondance classique-quantique*.

En Section 1.1, j'introduis la quantification de Berezin-Toeplitz dans le cadre de la *quantification holomorphe* des variétés Kähleriennes compactes, puis j'énonce la correspondance classique-quantique due à Bordemann, Meinreken et Schlichenmaier dans [16]. En Section 1.2, je décris le *noyau de Bergman*, qui constitue l'outil fondamental au cœur de mon approche de l'étude semi-classique de la quantification de Berezin-Toeplitz, à la suite des travaux fondateurs dûs à Dai, Liu et Ma dans [33]. En Section 1.3, je présente le point de vue de la mesure quantique sur la quantification de Berezin-Toeplitz au cœur du programme de Polterovich amorcé dans [80]. En Section 1.4, je décris les liens avec les actions hamiltoniennes de groupes de Lie, à travers le procédé de *quantification géométrique* dû à Kostant dans [62] et Souriau dans [89].

1.1 Quantification de Berezin-Toeplitz

Soit X une variété lisse sans bord de dimension $2n$, munie d'une 2-forme fermée non-dégénérée $\omega \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$, appelée *forme symplectique*. La donnée de (X, ω) est le cadre géométrique de base pour un *espace des phases*, décrivant un système de mécanique classique. En particulier, la donnée d'une fonction lisse $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ induit une dynamique dite *hamiltonienne* sur l'espace des phases, engendrée par le champs de vecteur $\xi_f \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$, appelé *champs de vecteurs hamiltonien* associé à f, et défini pour tout $\eta \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$ par la formule

$$\omega(\eta, \xi_f) = df.\eta\,. \tag{1.1.1}$$

À travers la *formule de Cartan*, on vérifie immédiatement que la forme symplectique est préservée par la dynamique hamiltonienne. Cela implique en particulier que la *forme volume de Liouville*

$$dv_X := \frac{\omega^n}{n!} \tag{1.1.2}$$

est elle aussi préservée par la dynamique hamiltonienne, ce qui peut être compris comme une formalisation symplectique du célèbre *théorème de Liouville* en mécanique classique. Le volume associé $\mathrm{Vol}(X, \omega) > 0$ peut alors être interprété comme une mesure du nombre d'états classiques disponibles.

D'autre part, une fonction lisse $g \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ peut être considérée comme une *observable classique*, qui à un état classique $x \in X$ renvoie la valeur $g(x) \in \mathbb{R}$ observée après un procédé de *mesure classique*. Ainsi, l'effet de la dynamique hamiltonienne induite par $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ sur une observable classique $g \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ est décrite par le *crochet de Poisson* $\{\cdot, \cdot\}$ défini par

$$\begin{aligned} \{f, g\} &:= \omega(\xi_f\,, \xi_g) \\ &= dg.\,\xi_f\,. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

L'antisymmétrie du crochet de Poisson, évidente d'après la formule (1.1.3), peut être comprise comme une formalisation symplectique du célèbre *théorème de Noether* en mécanique classique.

On demande de plus que la variété symplectique (X, ω) soit *préquantifiée*, de sorte qu'elle soit munie d'un fibré en droites hermitien (L, h^L) avec connexion hermitienne ∇^L dont la courbure $R^L \in \Omega^2(X, \mathbb{C})$ satisfait la *condition de préquantification* suivante,

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} R^L\,. \tag{1.1.4}$$

On dit alors que (X, ω) est *préquantifié* par (L, h^L, ∇^L). Cela implique en particulier que *la classe de cohomologie de de Rham* $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ est *entière*, et coïncide avec la *première classe de Chern* $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ du fibré en droites complexes L au-dessus de X. Inversement, si (X, ω) est une variété symplectique dont la classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ est entière, on peut construire un fibré en droite hermitien (L, h^L) muni d'une connexion hermitienne ∇^L dont la courbure satisfait la condition de préquantification (1.1.4).

Supposons maintenant que X soit compacte, et donc que (X, ω) représente un système de mécanique classique fermé. Dans ce contexte, la première classe de Chern de L satisfait $c_1(L) \neq 0$, et joue alors le rôle de *nombre quantique*. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la première classe de Chern de la *p-ième puissance tensorielle* $L^p := L^{\otimes p}$ satisfait $c_1(L^p) = p\, c_1(L)$, et la limite $p \to +\infty$ joue alors le rôle de limite semi-classique. On note h^{L^p} et ∇^{L^p} pour la métrique et la connexion induites par h^L et ∇^L, de sorte que la variété symplectique $(X, p\,\omega)$ soit préquantifiée par $(L^p, h^{L^p}, \nabla^{L^p})$.

Supposons maintenant que X admet également une structure de variété complexe, dont l'endomorphisme $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$ induit par la multiplication par $\sqrt{-1}$ sur le fibré tangent soit *compatible* avec ω, de sorte que $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$ et que la formule

$$g^{TX} := \omega(\cdot, J\cdot)\,, \tag{1.1.5}$$

définisse une métrique riemannienne, appelée *métrique de Kähler*, dont la forme volume induite coïncide avec la forme volume de Liouville (1.1.2). On dit alors que (X, ω, J) est une *variété Kählerienne*, et la forme symplectique ω est appelée *forme de Kähler*. Considérons la décomposition

$$TX \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}X \oplus T^{(0,1)}X \tag{1.1.6}$$

de la complexification $TX \otimes \mathbb{C}$ de TX en espaces propres de J correspondant aux valeurs propres $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$, et écrivons $\xi =: \xi^{1,0} + \xi^{0,1}$ pour la décomposition d'un champs de vecteur $\xi \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$ par rapport à (1.1.6). On obtient alors une structure holomorphe sur L induite par la connexion ∇^L, en déclarant qu'une section lisse locale $s \in \mathscr{C}^\infty(U, L)$ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$ est holomorphe si elle satisfait à l'équation suivante pour tout $\xi \in \mathscr{C}^\infty(U, TX)$,

$$\overline{\partial}^L_{\xi^{(1,0)}}\, s := \nabla^L_\xi s + \sqrt{-1}\nabla^L_{J\xi} s \equiv 0\,. \tag{1.1.7}$$

On vérifie de fait que cette équation admet toujours des solutions locales grâce à la condition de préquantification (1.1.4) et au fait que $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$. La connexion ∇^L est alors appelée *connexion de Chern* du fibré holomorphe Hermitien (L, h^L). On peut ainsi poser la définition fondamentale suivante pour les espaces de Hilbert d'états quantiques associés.

Définition 1.1.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification holomorphe* de la variété Kählerienne compacte $(X, p\,\omega, J)$ préquantifiée par $(L^p, h^{L^p}, \nabla^{L^p})$ est l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_p$ défini par

$$\mathscr{H}_p := \left(H^0(X, L^p), \langle\cdot,\cdot\rangle_p\right)\,, \tag{1.1.8}$$

où $H^0(X, L^p)$ désigne l'espace des sections holomorphes de L^p, muni du *produit* L^2 induit par restriction du produit défini sur les sections lisses $s_1,\ s_2 \in \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ par

$$\langle s_1, s_2\rangle_p := \int_X h^{L^p}(s_1(x), s_2(x))\, dv_X(x)\,. \tag{1.1.9}$$

La compacité de X implique que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'espace de quantification holomorphe $\mathscr{H}_p$ est de dimension finie. Plus précisément, d'après les les théorèmes *d'annulation de Kodaira* et de *Hirzebruch-Riemann-Roch*, on a le résultat fondamental suivant.

Proposition 1.1.2. *pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, on a*

$$\dim \mathscr{H}_p = \int_X \mathrm{Td}(X)\, e^{p\,\omega}\,, \tag{1.1.10}$$

où $\mathrm{Td}(X) \in H(X, \mathbb{R})$ *représente la* classe de Todd *de* (X, J)*. En particulier, on a l'estimée suivante lorsque $p \to +\infty$,*

$$\dim \mathscr{H}_p = p^n \operatorname{Vol}(X, \omega) + O(p^{n-1})\,. \tag{1.1.11}$$

Du point de vue de la mécanique quantique, la Proposition 1.1.2 illustre le fait que le nombre d'états quantiques disponible approche le nombre d'états classiques disponibles à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. C'est ainsi que la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch (1.1.10) peut être interprétée comme une version de la célèbre *loi de Weyl* pour la quantification holomorphe.

Rappelons les *observables classiques* sur l'espace des phases $(X, p\,\omega)$ sont représentées par l'espace des fonctions lisses $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, tandis que que pour tout $p \in \mathbb{N}$, les *observables quantiques* de la quantification holomorphe $\mathscr{H}_p$ sont représentées par l'espace des endomorphismes hermitiens $\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ agissant sur $\mathscr{H}_p$. Un procédé de quantification consiste alors en une application linéaire $T_p : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ associant une observable quantique à chaque observable classique. Le procédé de quantification suivant joue un rôle fondamental dans ce mémoire.

Définition 1.1.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification de Berezin-Toeplitz* associée à la quantification holomorphe de la Définition 1.1.1 est l'application linéaire

$$T_p : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\,, \tag{1.1.12}$$

envoyant une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ sur l'endomorphisme hermitien $T_p(f) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ défini comme la restriction de l'opérateur agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ par

$$T_p(f) = P_p f P_p\,, \tag{1.1.13}$$

où $P_p : \mathscr{C}^\infty(X, L^p) \to \mathscr{H}_p$ désigne l'opérateur de projection orthogonale par rapport au produit (1.1.9) et où f désigne l'opérateur de multiplication par la fonction f.

La formule (1.1.13) implique immédiatement l'inégalité $\|T_p(f)\|_p \leqslant \|f\|_\infty$, où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme d'opérateur sur $\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. La quantification de Berezin-Toeplitz a d'abord été développée par Berezin dans [8] puis par Rawnsley dans [81] et Cahen, Gutt et Rawnsley dans [23]. La *correspondance classique-quantique* suivante, qui joue un rôle fondamental dans ce mémoire, est dûe quant à elle à Bordemann, Meinreken et Schlichenmaier dans [16], sur la base des résultats fondamentaux de Boutet de Monvel et Sjöstrand [22] et de Boutet de Monvel et Guillemin [21]. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $|\cdot|_{\mathscr{C}^m}$ pour la norme $\mathscr{C}^m$ induite par (1.1.5).

Théorème 1.1.4. *[16, 85] Il existe une suite d'opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ tels que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que tous $f,\ g\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, on a les estimées suivantes au sens de la norme d'opérateur lorsque $p\to+\infty$,*

$$\begin{aligned} \|T_p(f)\|_p &= \|f\|_\infty + O(p^{-1})\,|f|_{\mathscr{C}^m}\,, \\ T_p(f)T_p(g) &= T_p(fg) + \sum_{r=1}^{k-1} p^{-r}T_p(C_r(f,g)) + O(p^{-k})\,|f|_{\mathscr{C}^m}\,, \\ [T_p(f),T_p(g)] &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}p}T_p(\{f,g\}) + O(p^{-2})\,|f|_{\mathscr{C}^m}\,, \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

où on a étendu $T_p:\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})\longrightarrow \mathrm{End}(\mathscr{H}_p)$ par $\mathbb{C}$-linéarité.

Les valeurs optimales de $m\in\mathbb{N}$ ont été calculées par Charles et Polterovich dans [32]. la dernière estimée de (1.1.14) constitue la propriété fondamentale de la *correspondance classique-quantique*, illustrant le fait que ce procédé de quantification retrouve la dynamique classique comme une approximation de la dynamique quantique à la limite semi-classique lorsque $p\to+\infty$. De fait, l'*équation d'évolution de Schrödinger* à l'échelle $\hbar\sim(2\pi p)^{-1}$ énonce que la dynamique associée à une observable quantique $A\in\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ au temps $t\in\mathbb{R}$ est donnée par l'endomorphisme unitaire

$$e^{-2\pi\sqrt{-1}p\,tA}\in U(\mathscr{H}_p)\,. \tag{1.1.15}$$

Le crochet de commutation de l'algèbre d'endomorphismes $\mathrm{End}(\mathscr{H}_p)$ multiplié par $2\pi\sqrt{-1}p$ représente ainsi l'évolution infinitésimale d'une observable quantique sous la dynamique quantique (1.1.15) engendrée par une autre, tandis que le crochet de Poisson (1.1.3) représente l'évolution infinitésimale d'une observable classique sous la dynamique hamiltonienne engendrée par une autre.

L'existence d'une suite d'applications linéaires $\{T_p:\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})\to\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ satisfaisant les axiomes (1.1.14) du Théorème 1.1.4 est une propriété hautement non-triviale de la variété symplectique (X,ω), propriété qui sera étudiée de manière systématique au 5. Pour s'en rendre compte, remarquons qu'une telle suite induit une *quantification par déformation* du crochet de Poisson (1.1.3), notion introduite par Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, et Sternheimer dans [7] comme un point de vue sur la mécanique quantique qui fait abstraction des espaces de Hilbert pour se concentrer sur les observables. Dans ce contexte, les observables quantiques sont représentées par l'espace $\mathscr{C}^\infty(M,\mathbb{C})[[\hbar]]$ des séries formelles à coefficient dans $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, pour lesquelles le quantum d'action $\hbar$ joue ici le rôle de variable formelle.

Définition 1.1.5. Une *quantification par déformation* du crochet de Poisson (1.1.3) est une $\hbar$-algèbre associative linéaire sur l'espace $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})[[\hbar]]$, admettant $1\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ comme unité et dont le produit $*$ est donné pour tout $f,\ g\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ par

$$f*g = fg + \sum_{r=0}^{+\infty}\hbar^r\,C_r(f,g)\,, \tag{1.1.16}$$

où $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs bi-différentiels agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$, et satisfaisant

$$C_1(f,g) - C_1(g,f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\{f,g\}\,. \tag{1.1.17}$$

L'identité (1.1.17) traduit le fait que le crochet de commutation associé au produit (1.1.16) multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$ s'identifie au crochet de Poisson (1.1.3) au premier ordre en $\hbar$, et donc que la dynamique quantique approche la dynamique classique (1.1.15) à la limite semi-classique lorsque $\hbar \to 0$. L'existence d'une quantification par déformation sur une variété symplectique compacte générale (X,ω) est un problème extrêmement délicat, la condition d'associativité induisant une série infinie de contraintes sur la suite d'opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$. Ce problème a été résolu par De Wilde et Lecomte dans [35], à la suite desquels Fedosov donne dans [40] une construction géométrique systématique pour produire et étudier toutes les quantifications par déformation d'une variété symplectique. Plus généralement encore, l'existence d'une quantification par déformation sur les *variétés de Poisson* a été établie par Kontsevitch dans [61]. Le Théorème 1.1.4 fournit un exemple explicite d'une telle déformation par quantification dans le cas des variétés Kähleriennes compactes préquantifiées, en identifiant la suite d'opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ de la Définition 1.1.5 avec celle apparaissant dans le Théorème 1.1.4.

1.2 Noyau de Bergman

Un objet central dans l'étude de la quantification de Berezin-Toeplitz est fourni par la définition suivante.

Définition 1.2.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, le *noyau de Bergman* associé à la quantification holomorphe de la Définition 1.1.1 est le noyau de Schwartz par rapport à la mesure de Liouville (1.1.2) de la projection orthogonale $P_p : \mathscr{C}^\infty(X,L^p) \to \mathscr{H}_p$. Il est noté $P_p(x,y) \in L^p_x \otimes (L^p_y)^*$ pour tout $x,\, y \in X$, et est défini pour tout $s \in \mathscr{C}^\infty(X,L^p)$ et tout $x \in X$ par la formule

$$P_p s(x) = \int_X P_p(x,y)s(y)dv_X(y)\ . \tag{1.2.1}$$

Étant donnée une base orthonormée $\{s_j \in \mathscr{H}_p\}_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_p}$, on vérifie immédiatement que le noyau de Bergman est caractérisé par la formule suivante, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $x,\, y \in X$,

$$P_p(x,y) = \sum_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_p} s_j(x) \otimes s_j(y)^*\,, \tag{1.2.2}$$

où pour tout $e \in L^p_y$, on note $e^* \in (L^p_y)^*$ pour son dual métrique par rapport à h^{L^p}. En particulier, cela implique que le noyau de Bergman est lisse en ses deux variables $x,\, y \in X$. Il est de plus directement lié à la fonction suivante, introduite par Rawnsley dans [81] et qui joue un rôle fondamental en quantification de Berezin-Toeplitz.

Définition 1.2.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction de *densité d'états quantiques* est la fonction $\rho_p \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ définie pour tout $x \in X$ par

$$\rho_p(x) = \sum_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_p} |s_j(x)|^2_{h^{L^p}} \,, \tag{1.2.3}$$

où $\{s_j \in \mathscr{H}_p\}_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_p}$ est une base orthonormée pour le produit (1.1.9).

En comparant avec la formule (1.2.2), on voit que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $x \in X$, à travers l'identification canonique de $L^p_x \otimes (L^p_x)^* = \mathrm{End}(L^p_x)$ avec $\mathbb{C}$, cette fonction satisfait

$$\rho_p(x) = P_p(x, x) \,. \tag{1.2.4}$$

Le rôle fondamental du noyau de Bergman apparaît clairement dans la formule suivante pour le noyau de Schwartz de la quantification de Berezin-Toeplitz d'une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, qui est une conséquence immédiate de la Définition 1.1.3, pour tout $x, y \in X$,

$$T_p(f)(x, y) = \int_X f(w)\, P_p(x, w) P_p(w, y)\, dv_X(w) \,. \tag{1.2.5}$$

À travers les formules usuelles pour les noyaux de Schwartz vis-à-vis de la trace, de l'adjonction et de la composition d'opérateurs, ainsi que l'identité $P_p^2 = P_p$, on en déduit en particulier la *formule de trace* suivante, pour tous $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr}[T_p(f)] = \int_X f(x)\, \rho_p(x)\, dv_X(x) \,. \tag{1.2.6}$$

Le trace sur l'espace d'états quantiques $\mathscr{H}_p$ peut être interprétée comme une mesure de la densité des états quantiques, et la formule (1.2.6) donne ainsi une interprétation semi-classique de la fonction de densité d'états quantiques comme mesure à densité sur l'espace des phases classique. Cette interprétation sera développée dans la section suivante.

Le résultat semi-classique fondamental concernant la fonction de densité d'états (1.2.3) est le développement asymptotique suivant lorsque $p \to +\infty$, dû à Zelditch dans [100] et à Catlin dans [24] sur la base des travaux de Boutet de Monvel et Sjöstrand dans [22], et à la suite des résultats fondateur de Tian dans [92], puis de Bouché dans [20] et de Ruan dans [83].

Théorème 1.2.3. *[22, 100, 24] Il existe une suite de fonctions $\{g_r \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})\}_{r \in \mathbb{N}}$ telle que pour tous $x \in X$ et $m, k \in \mathbb{N}$, on a l'estimée suivante au sens de la norme $\mathscr{C}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ lorsque $p \to +\infty$,*

$$\rho_p = \sum_{r=0}^{k-1} p^{n-r} g_r + O(p^{n-k}) \,. \tag{1.2.7}$$

De plus, si $\mathrm{scal}(g^{TX}) \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ *désigne la* courbure scalaire *de la métrique de Kähler* g^{TX} *donnée par* (1.1.5)*, on a*

$$g_0 \equiv 1 \qquad \textit{et} \qquad g_1 = \frac{\mathrm{scal}(g^{TX})}{8\pi} \,. \tag{1.2.8}$$

Ce résultat joue un rôle crucial dans les travaux de Donaldson dans [36], que nous arboderons au Chapitre 4. D'autre part, à travers la formule de trace (1.2.6), on obtient comme corollaire du Théorème 1.2.3 le résultat semi-classique fondamental suivant concernant la quantification de Berezin-Toeplitz.

Corollaire 1.2.4. *Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, on a l'estimée suivante lorsque $p \to +\infty$,*

$$\operatorname{Tr}[T_p(f)] = p^n \int_X f(x)\, dv_X(x) + O(p^{n-1})\, \|f\|_\infty \,. \tag{1.2.9}$$

Le Corollaire 1.2.4 est parfois appelée *axiome de trace*, et peut être considéré comme une version de la *loi de Weyl locale* pour la quantification de Berezin-Toeplitz. En particulier, on retrouve immédiatement la loi de Weyl de la Proposition 1.1.2 en posant $f \equiv 1$. Plus généralement, le Théorème 1.2.3 est compatible avec le fait que la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch (1.1.10) est polynomiale en $p \in \mathbb{N}$ et donne l'estimée suivante lorsque $p \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{H}_p &= p^n \int \frac{\omega^n}{n!} + p^{n-1} \int \frac{c_1(X)}{2} \wedge \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} + O(p^{n-2}) \\ &= p^n \int_X \Big(1 + \frac{\operatorname{scal}(g^{TX})}{8\pi p}\Big)\, dv_X + O(p^{n-2})\,, \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

où $c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ représente la *première classe de Chern* de (X, J), définie à travers la décomposition (1.1.6) comme la première classe de Chern du *fibré canonique*

$$K_X := \det(T^{(1,0)}X) \tag{1.2.11}$$

au-dessus de X, muni de la métrique hermitienne h^{K_X} induite par la métrique riemannienne g^{TX} définie par (1.1.5) et de la connexion hermitienne ∇^{K_X} induite par la restriction à $T^{(1,0)}X$ de la *connexion de Levi-Civita* associée.

L'approche de la correspondance classique-quantique pour la quantification de Berezin-Toeplitz suivie par Ma et Marinescu dans [71] est fondée sur un résultat fondamental dû à Dai, Liu et Ma dans [33], donnant une description précise du noyau de Bergman à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. Pour décrire ce résultat, fixons $\varepsilon_0 > 0$ plus petit que le rayon d'injectivité de X, et pour tout $x \in X$, considérons les coordonnées géodésiques normales $Z = (Z_1, ..., Z_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$ avec $|Z| < \varepsilon_0$ autour de x associées à la métrique riemannienne g^{TX} définie par (1.1.5), où $|\cdot|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{2n}$. On écrit $P_{p,x}(\cdot,\cdot)$ pour l'image du noyau de Bergman dans ces coordonnées,et $|P_{p,x}|_{\mathscr{C}^m(X)}$ pour la norme $\mathscr{C}^m$ par rapport à $x \in X$. Suivant [71, (3.25)], on considère le modèle local explicite suivant pour le noyau de Bergman, pour tout $Z, Z' \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$\mathscr{P}_x(Z, Z') = \exp\left(-\frac{\pi}{2}|Z - Z'|^2 - \pi\sqrt{-1}\Omega(Z, Z')\right)\,, \tag{1.2.12}$$

où Ω est la forme symplectique usuelle de $\mathbb{R}^{2n}$. On note d^X la distance riemannienne de X. La version suivante du résultat fondamental de Dai, Liu et Ma, dont l'énoncé peut être trouvé dans [G, Prop. 2.7], est légèrement plus faible que celle énoncée dans [33] mais s'étend au cadre presque holomorphe qui sera présenté en Section 2.2 et suffit pour les applications.

Théorème 1.2.5. *[33, Th. 4.18'], [G, Prop. 2.7] Pour tous $m\,,k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in X$ satisfaisant $d^X(x,y) > \varepsilon$, on a*

$$|P_p(x,y)|_{\mathscr{C}^m} \leqslant Cp^{-k}\ . \tag{1.2.13}$$

De plus, il existe une suite $\{J_{r,x}(Z,Z') \in \mathbb{C}[Z,Z']\}_{r\in\mathbb{N}}$ de polynômes en $Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n}$ de même parité que r, dépendant de manière lisse de $x \in X$, telle que pour tous $m, k \in \mathbb{N}$ et $\delta \in]0,1[$, il existe $\theta \in]0,1[$, $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que pour tous $|Z|, |Z'| < \varepsilon\, p^{-\frac{\theta}{2}}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| p^{-n} P_{p,x}(Z,Z') \;-\; \sum_{r=0}^{k-1} p^{-r/2} J_{r,x}(\sqrt{p}Z, \sqrt{p}Z')\mathscr{P}_x(Z,Z') \right|_{\mathscr{C}^m(X)} \;\leqslant\; Cp^{-\frac{k}{2}+\delta} \quad , \tag{1.2.14}$$

De plus, pour tous $Z, Z' \in \mathbb{R}^{2n}$, on a $J_{0,x}(Z,Z') \equiv 1$.

Grâce au Théorème 1.2.5, on retrouve en particulier le développement asymptotique (1.2.7) de la fonction de densité d'états quantiques avec $g_0 \equiv 1$. La version générale du Théorème 1.2.5 présentée dans [33] vaut pour le noyau du Bergman de l'*opérateur de Dirac spin^c* associé à une structure presque complexe $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$ sur une variété symplectique préquantifiée générale. Dai, Liu et Ma montrent alors dans [33] que le terme sous-dominant $g_1 \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ est égal à la *courbure scalaire hermitienne* de la métrique hermitienne g^{TX} définie comme en (1.1.5). La version générale du Théorème 1.2.5 vaut aussi pour la quantification des fibrés vectoriels qui sera présentée au Chapitre 2. À la suite de [33], Ma et Marinescu donnent dans [68] un procédé algorithmique pour calculer récursivement la suite des polynômes $\{J_{r,x}(Z,Z')\}_{r\in\mathbb{N}}$ du développement (1.2.14).

Sur la base du Théorème 1.2.5, Ma et Marinescu établissent dans [71] le critère suivant pour déterminer si une suite d'opérateurs agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ est un opérateur de Toeplitz.

Théorème 1.2.6. *[71, Th. 4.9] Soit $\{Q_p : \mathscr{C}^\infty(X,L^p) \to \mathscr{C}^\infty(X,L^p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires satisfaisant $P_pQ_pP_p = Q_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et dont le noyau de Schwartz satisfait un développement de la forme* (1.2.14) *lorsque $p \to +\infty$.*

Alors il existe une suite de fonctions $\{f_r \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})\}_{r\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'estimée suivante au sens de la norme d'opérateur lorsque $p \to +\infty$,

$$Q_p = \sum_{r=1}^{k-1} p^{-r} T_p(f_j) + O(p^{-k})\ . \tag{1.2.15}$$

Une suite d'endomorphismes $\{Q_p \in \mathrm{End}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ satisfaisant (1.2.15) est appelée *opérateur de Toeplitz*, et le Théorème 1.1.4 montre ainsi que les opérateurs de Toeplitz forment une algèbre. Ce critère joue un rôle majeur dans l'approche de la quantification de Berezin-Toeplitz dûe à Ma et Marinescu dans [71]. De fait, le développement asymptotique du noyau de Bergman établi en Théorème 1.2.5 appliqué à la formule (1.2.5) montre que la composition des quantifications de Berezin-Toeplitz de deux fonction f

et $g \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ admet bien noyau de Schwartz satisfaisant un développement de la forme (1.2.14), et on retrouve alors le Théorème 1.1.4 comme une conséquence des Théorèmes 1.2.5 et 1.2.6. En particulier, Ma et Marinescu donnent dans [71, § 2] un procédé algorithmique pour calculer récursivement la suite d'opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ apparaissant dans le développement (1.1.14), ce qui leur permet de retrouver la dernière estimée de (1.1.14) sur la correspondance classique-quantique pour la quantification de Berezin-Toeplitz.

1.3 Point de vue de la mesure quantique

Considérons maintenant un espace de Hilbert d'états quantiques $\mathscr{H}$ de dimension finie, ainsi qu'un espace topologique X muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathscr{B}(X)$, vu comme espace de paramètre associé à un procédé de mesure quantique. Un tel procédé est décrit par la notion suivante.

Définition 1.3.1. Un *mesure à valeurs opérateurs positifs* sur $\mathscr{H}$ au-dessus de $(X,\mathscr{B})$ est une application σ-additive

$$W : \mathscr{B}(X) \longrightarrow \mathrm{Herm}(\mathscr{H}) \tag{1.3.1}$$

à valeur dans les opérateurs positifs, satisfaisant $W(\emptyset) = 0$ et $W(X) = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}}$.

Si le système quantique est dans l'état $s \in \mathscr{H}$ avec $\|s\| = 1$, et que l'on effectue une mesure quantique selon (1.3.1), alors la probabilité que la mesure rende une valeur de paramètre appartenant à $U \in \mathscr{B}$ est donnée par

$$\mathbb{P}(x \in U) := \langle W(U)s, s\rangle\,. \tag{1.3.2}$$

Plus généralement, les états du système quantique représenté par $\mathscr{H}$ sont décrits par le sous-espace $S(\mathscr{H}) \subset \mathrm{Herm}(\mathscr{H})$ des opérateurs de trace égale à 1, et si le système est dans l'état $\Pi \in S(\mathscr{H})$, l'interprétation (1.3.2) s'écrit $\mathbb{P}(x \in U) := \mathrm{Tr}[W(U)\,\Pi]$.

Il est facile de vérifier que toute mesure à valeurs opérateurs positifs W admet une densité, c'est à dire qu'il existe une mesure $d\nu$ sur X et une application mesurable $\Pi : X \to S(\mathscr{H})$ telles que pour tout $U \in \mathscr{B}$ et $s \in \mathscr{H}$, on a

$$W(U)s = \int_U \Pi(x)s\,d\nu(x)\,. \tag{1.3.3}$$

L'opérateur $\Pi(x) \in S(\mathscr{H})$ est appelé *état cohérent* associé à $x \in X$ pour le procédé de mesure quantique W, tandis que la mesure $d\nu$ sur X est appelée *mesure de densité d'états quantiques*. En particulier, la mesure d'une observable $f \in L^1(X, d\nu)$ sur l'espace des paramètres X est représentée par l'opérateur positif

$$T(f) := \int_X f(x)\,\Pi(x)\,d\nu(x) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H})\,, \tag{1.3.4}$$

fournissant une notion de quantification naturelle associé au procédé de mesure quantique W. On a aussi une notion de *symbole* $\sigma(A) \in L^\infty(X, d\nu)$ d'une observable quantique $A \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$, défini pour tout $x \in X$ par

$$\sigma(A)(x) := \mathrm{Tr}[A\Pi(x)]\,, \tag{1.3.5}$$

interprété comme l'observable classique donnée par l'espérance de $A \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ dans les états cohérents. Le symbole peut donc être vu comme une opération de *déquantification*. On a aussi la notion suivante, fondamentale en théorie de la mesure quantique.

Définition 1.3.2. Le *tunnel quantique* est l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} \mathscr{E} : \mathrm{Herm}(\mathscr{H}) &\longrightarrow \mathrm{Herm}(\mathscr{H})\,, \\ A &\longmapsto T\left(\sigma\left(A\right)\right)\,. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

L'opérateur de tunnel quantique appliqué à une observable quantique $A \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H})$ représente son évolution une opération de mesure quantique. Pour s'en rendre compte, considérons l'exemple fondamental d'un *procédé de mesure idéal* sur un ensemble fini de paramètres $X = \{1, \cdots n\}$. Dans ce contexte, l'espace de Hilbert d'états quantiques est donné par $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n$, et la mesure à valeur opérateurs positifs (1.3.1) est donnée pour tout $j \in X$ par le projecteur orthogonal $W(\{j\}) := \Pi_{e_j}$ sur la droite engendrée par le j-ième élément $e_j \in \mathbb{C}^n$ de la base canonique. D'après l'interprétation (1.3.2), la probabilité que la mesure rende une valeur $j \in X$ est donnée par $\mathbb{P}(x = j) = |\langle s, e_j\rangle|^2$, ce qui s'interprète comme la probabilité que le système se trouve dans l'état $e_j \in \mathbb{C}^n$ après le procédé de mesure quantique associé. Étant donnée une observable quantique $A \in \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n)$, on vérifie immédiatement que son tunnel quantique est alors donné par

$$\mathscr{E}(A) = \sum_{j=1} |\langle Ae_j, e_j\rangle|^2\, \Pi_{e_j}\,. \tag{1.3.7}$$

On voit ainsi qu'après le procédé de mesure quantique, l'observable $A \in \mathrm{Herm}(\mathbb{C}^n)$ devient diagonale dans la base canonique, de coefficient diagonal égal à son espérance en $e_j \in \mathbb{C}^n$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, ce qui correspond à l'interprétation usuelle d'un procédé de mesure quantique idéal.

Dans ce mémoire, nous nous intéresserons plutôt au cas particulier où l'espace des paramètres est fourni par une variété symplectique préquantifiée (X, ω), et où l'espace de Hilbert d'états quantiques $\mathscr{H}_p$ est de dimension finie et dépend d'un paramètre entier $p \in \mathbb{N}$ comme en Section 1.1. On pose alors la définition suivante.

Définition 1.3.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *mesure quantique de Berezin-Toeplitz* associé à la quantification holomorphe de la Définition 1.1.1 est la mesure à valeurs opérateurs positifs $W_p : \mathscr{B}(X) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ définie pour tout $U \in \mathscr{B}(X)$ et $s \in \mathscr{H}_p$ par

$$\langle W_p(U)s, s\rangle_p = \int_U h^{L^p}(s(x), s(x))\, dv_X(x)\,. \tag{1.3.8}$$

D'après le théorème d'annulation de Kodaira, pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand et tout $x \in X$, l'application d'évaluation en $x \in X$ n'est pas identiquement nulle sur

$\mathscr{H}_p$. En suivant par exemple [K, Prop. 2.3, Lem. 2.16], on vérifie alors que la mesure quantique de Berezin-Toeplitz de la Définition 1.3.3 admet une unique densité comme en (1.3.3), de sorte que pour tout $U \in \mathscr{B}(X)$ et $s \in \mathscr{H}_p$, on a

$$W_p(U)s = \int_U \Pi_p(x)s \;\rho_p(x)\, dv_X(x)\,, \tag{1.3.9}$$

où l'état cohérent $\Pi_p(x) \in S(\mathscr{H}_p)$ associé à $x \in X$ est l'unique projecteur orthogonal de rang 1 satisfaisant

$$\operatorname{Ker} \Pi_p(x) = \{\, s \in \mathscr{H}_p \mid s(x) = 0 \,\}\,, \tag{1.3.10}$$

et où la fonction de densité d'états quantique $\rho_p \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ coïncide avec celle de la Définition 1.2.2, d'après la formule suivante pour tous $x \in X$ et $s_1,\, s_2 \in \mathscr{H}_p$, que l'on vérifie immédiatement en sommant sur une base orthonormée de $\mathscr{H}_p$,

$$\rho_p(x)\, \langle \Pi_p(x)s_1, s_2\rangle_p = h^{L^p}(s_1(x), s_2(x))\,. \tag{1.3.11}$$

On vérifie de plus que la quantification (1.3.4) coïncide avec la quantification de Berezin-Toeplitz de la Définition 1.1.3. D'autre part, la notion de symbole (1.3.5) coïncide avec le *symbole de Berezin* introduit par Berezin dans [8] et étudié par Cahen, Gutt et Rawnsley dans [23, § 2]. Les propriétés spectrales de l'opérateur de tunnel quantique associé seront étudiées au Chapitre 4 à travers les propriétés spectrales de l'objet fondamental suivant.

Définition 1.3.4. La *transformée de Berezin* est l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_p : \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})\,, \\ f &\longmapsto \sigma_p\left(T_p(f)\right)\,. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Si le tunnel quantique mesure l'évolution d'une observable quantique après l'opération de mesure de Berezin-Toeplitz, la transformée de Berezin peut être interprétée comme la délocalisation subie par une observable classique $f \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ après le procédé de quantification. En particulier, on s'attend à retrouver la fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. C'est l'objet du résultat suivant, dû à Karabegov et Schlichenmaier dans [57], que nous précisons dans [D].

Proposition 1.3.5. *[57], [D, Prop. 4.8] Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$, on a le développement asymptotique suivant lorsque $p \to +\infty$,*

$$B_p(f) = f - \frac{1}{4\pi p}\Delta f + O(p^{-2})\,|f|_{\mathscr{C}^4}\,, \tag{1.3.13}$$

où Δ désigne le laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ associé à la métrique de Kähler g^{TX} définie en (1.1.5).

À titre d'exemple, on peut montrer grâce au Théorème 1.2.5 que la transformée de Berezin de la *mesure de Dirac* associée à un point $x \in X$ approche une Gaussienne de largeur $\hbar \sim (2\pi p)^{-1}$ autour de $x \in X$, ce qui peut être interprété comme l'incertitude sur la position dans l'espace des phases de la quantification d'une particule en x.

1.4 Quantification géométrique

Intéressons nous maintenant à la dynamique hamiltonienne engendrée par le champs de vecteur hamiltonien $\xi_f \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$ associé à une fonction lisse $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ comme en (1.1.1), pour tout $t \in \mathbb{R}$. Étant donné un flot $\varphi_t : X \to X$ se relevant en un flot $\varphi_t^L : L \to L$ sur le fibré préquantifiant (L, h^L, ∇^L) au-dessus de X pour tout $t \in \mathbb{R}$, on obtient alors un flot induit $\varphi_t^{L^p} : L^p \to L^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, ainsi qu'un flot $\varphi_{t,p} : \mathscr{C}^\infty(X, L^p) \to \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ défini sur toute section $s \in \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$et tout $x \in X$ par la formule

$$(\varphi_{t,p}\, s)(x) := \varphi_t^{L^p}.s(\varphi_t^{-1}(x))\,. \tag{1.4.1}$$

On alors le résultat fondamental suivant, initialement dû à Kostant dans [62].

Proposition 1.4.1. *[62, Prop. 3.4.2] Quel que soit $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, le flot hamiltonien $\varphi_t : X \to X$ associé se relève uniquement pour tout $t \in \mathbb{R}$ en un flot $\varphi_t^L : L \to L$ sur le fibré préquantifiant (L, h^L, ∇^L) au-dessus de X préservant métrique et connexion, et caractérisé pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ par la formule*

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi p} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_{t,p}\, s = f\, s - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi p} \nabla^L_{\xi_f} s\,. \tag{1.4.2}$$

La formule (1.4.2) est appelée *formule de Kostant*. La Proposition 1.4.1 montre ainsi qu'un flot hamiltonien est naturellement *préquantifié*, induisant un flot d'applications linéaires (1.4.1) préservant le produit (1.1.9) sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Supposons maintenant que ce flot préserve une structure complexe compatible $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$, et donc d'après (1.1.5), appartient au *groupe d'isométries riemanniennes* de (X, g^{TX}). D'après la définition (1.1.7) d'une section holomorphe, il se restreint alors en un flot d'applications unitaires

$$Q_p(\varphi_t) := \varphi_{t,p} : \mathscr{H}_p \longrightarrow \mathscr{H}_p\,, \tag{1.4.3}$$

préservant les espaces de quantification holomorphe de la Définition 1.1.1 pour tout $p \in \mathbb{N}$, qu'on appelle *quantification du flot hamiltonien* $\varphi_t : X \to X$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le flot (1.4.3) peut ainsi être interprété comme la dynamique quantique en temps $t \in \mathbb{R}$ associée à la dynamique hamiltonienne induite par $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. Plus précisément, la Proposition 1.4.1 montre que

$$Q_p(\varphi_t) = e^{-2\pi\sqrt{-1}tp\, Q_p(f)} \in U(\mathscr{H}_p)\,, \tag{1.4.4}$$

où l'endomorphisme hermitien $Q_p(f) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ est défini pour tout $s \in \mathscr{H}_p$ par

$$Q_p(f)s := P_p\Big(f - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi p} \nabla^{L^p}_{\xi_f}\Big) P_p\, s = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi p} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_{t,p}\, s\,. \tag{1.4.5}$$

La quantification du flot hamiltonien (1.4.3) coïncide donc avec l'opérateur d'évolution quantique (1.1.15) associé à l'observable (1.4.5) On s'attend alors à une correspondance classique-quantique entre cette observable quantique et l'observable classique $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, à la manière du Théorème 1.1.4. Cette connexion est fournie plus généralement par le résultat élémentaire suivant, attribué à Tuynman par Bordemann, Meinrenken et Schlichenmaier dans [16].

Proposition 1.4.2. [96, 16] *Quels que soient $f \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}$, on a l'identité suivante pour tout $s \in \mathscr{C}^\infty(X,L^p)$,*

$$P_p\Big(f - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi p}\nabla^{L^p}_{\xi_f}\Big)P_p\, s = P_p\Big(f + \frac{1}{4\pi p}\Delta f\Big)P_p\, s\,, \tag{1.4.6}$$

où Δ désigne le laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ associé à la métrique de Kähler g^{TX} définie en (1.1.5).

D'après la Définition 1.1.3, la Proposition 1.4.2 montre ainsi que le générateur de la dynamique quantique (1.4.4) forme un opérateur de Toeplitz au sens du développement asymptotique (1.2.15) lorsque $p \to +\infty$, dont le terme dominant est donné par la quantification de Berezin-Toeplitz de l'observable classique correspondante. On obtient ainsi le procédé de quantification suivant, dû à Kostant dans [62] et Souriau dans [89].

Définition 1.4.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification géométrique de Kostant-Souriau* est l'application linéaire

$$\begin{aligned} Q_p : \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p) \\ f &\longmapsto T_p\Big(f + \frac{1}{4\pi p}\Delta f\Big)\,, \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

où Δ désigne le laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ associé à la métrique de Kähler g^{TX} définie en (1.1.5).

En particulier, on obtient comme corollaire du Théorème 1.1.4 que la quantification de Kostant-Souriau satisfait bien la correspondance classique-quantique (1.1.14) à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$.

On a vu plus haut que si le flot hamiltonien préserve une structure complexe compatible $J \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathrm{End}(TX))$, alors il appartient au groupe d'isométries riemanniennes de (X, g^{TX}), qui forme un groupe de Lie compact. Considérons inversement l'action d'un groupe de Lie compact G sur (X,ω) se relevant à (L, h^L, ∇^L) préservant métrique et connexion. Pour tout élément $\xi \in \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ pour son algèbre de Lie, on note $\xi^X \in \mathscr{C}^\infty(X,TX)$ le champ de vecteur défini pour tout $x \in X$ par

$$\xi^X_x := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{-t\xi}.x\,. \tag{1.4.8}$$

On a de plus une action induite de G sur les sections $\mathscr{C}^\infty(X,L^p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, définie par la formule (1.4.1) La Proposition 1.4.1 motive alors la définition suivante, dûe à Kostant dans [62, Th. 4.5.1].

Définition 1.4.4. Le *moment* $\mu : X \to \mathfrak{g}^*$ de l'action de G sur (L, h^L, ∇^L) est défini par la formule suivante, pour tous $\xi \in \mathfrak{g}$ et $s \in \mathscr{C}^\infty(X,L)$,

$$\mu(\xi)\, s = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\left(\nabla^L_{\xi^X} s - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{t\xi}\, s\right)\,. \tag{1.4.9}$$

On vérifie immédiatement que le membre de droite de la formule (1.4.9) est $\mathscr{C}^\infty(X)$-linéaire, de sorte que le côté gauche définit bien une fonction $\mu(\xi) \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. D'autre part, on vérifie facilement que la Définition 1.4.4 définit une *application moment* pour l'action symplectique de G sur (X, ω), de sorte que pour tout $\eta \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$, on a

$$\omega(\eta, \xi^X) = d\mu(\xi).\eta\,. \tag{1.4.10}$$

On dit alors que l'action de G sur (X, ω) est *hamiltonienne*, représentant un groupe de symmétries de l'espace des phases classique (X, ω). En particulier, le flot engendré sur X par $\xi^X \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$ coïncide avec la dynamique hamiltonienne (1.1.1) induite par la fonction $\mu(\xi) \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, et la Proposition 1.4.1 montre que l'on est alors dans la situation décrite au début de cette section.

En particulier, supposons maintenant que G préserve aussi une structure complexe compatible $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$, induisant ainsi une action unitaire sur les espaces de quantification holomorphe $\mathscr{H}_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ comme en (1.4.4). D'après les définitions (1.1.3) et (1.4.10) du crochet de Poisson et de l'application moment, on déduit de la Proposition 1.4.2 que pour tous $\xi,\, \eta \in \mathfrak{g}$, on a

$$[Q_p(\mu(\xi)), Q_p(\mu(\eta))] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}p}\, Q_p(\{\mu(\xi), \mu(\eta)\})\,. \tag{1.4.11}$$

Le correspondance classique-quantique pour la quantification de Kostant-Souriau de la Définition 1.4.3 devient donc exacte lorsqu'elle est restreinte à l'image de l'application moment, ce qui exprime le fait que le groupe de symmétrie classique correspond précisément au groupe de symmétries quantiques. De fait, la quantification de Kostant-Souriau est la plus adaptée pour l'étude de la relation entre dynamiques classiques et quantiques, comme cela sera illustré dans le Chapitre 3.

Décrivons maintenant un exemple fondamental de variété symplectique (X, ω) munie d'une action hamiltonienne de G. Pour cela, choisissons d'abord un produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ invariant par l'action adjointe, induisant un isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ ainsi qu'une action de G sur $\mathfrak{g}^*$, appelée *action coadjointe* et notée Ad_g^* pour tout $g \in G$. Choisissons de plus un tore maximal $T \subset G$, et notons $\mathfrak{t} := \mathrm{Lie}(T)$ son algèbre de Lie. L'isomorphisme $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ induit alors une inclusion $\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$, et on a alors la notion fondamentale suivante, attribuée par Kirillov par Kostant dans [62].

Proposition 1.4.5. *[62, Prop. 5.2.2] L'action d'un groupe de Lie compact G sur l'*orbite coadjointe *passant par un élément $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ et définie par*

$$X_\lambda := \{\mathrm{Ad}_g^*\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*\,, \tag{1.4.12}$$

est hamiltonienne pour la forme symplectique $\omega \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$ définie pour tous $\xi_1,\, \xi_2 \in \mathfrak{g}$ et $\alpha \in X$ par

$$\omega_\alpha(\xi_1^X, \xi_2^X) = \alpha([\xi_1, \xi_2])\,, \tag{1.4.13}$$

avec application moment associée $\mu : X_\lambda \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ donnée par l'inclusion.

Supposons maintenant que $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ est *régulier*, de sorte que son stabilisateur est réduit au tore maximal $T \subset G$, auquel cas l'orbite coadjointe X_λ associée est de dimension maximale parmi les orbites coadjointes de G, et admet une identification G-equivariante naturelle $X_\lambda \simeq G/T$. Une telle orbite est appelée *régulière*. Supposons de plus que $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ est *entier*, de sorte qu'il satisfait $\exp(\lambda) = e \in G$ via l'identification $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}^*$ ci-dessus. Suivant Kostant dans [62, Th. 5.7.1], on a alors un caractère induit

$$\begin{aligned} \sigma : T &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}^* \\ \xi &\longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\langle \lambda, \xi \rangle}, \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

et le fibré en droites G-équivariant $L_\lambda := G \times_\sigma \mathbb{C}$ au-dessus de $X_\lambda \simeq G/T$ est muni d'une connexion G-équivariante ∇^{L_λ} naturelle préservant la métrique hermitienne h^{L_λ} induite par la métrique hermitienne usuelle de $\mathbb{C}$. Par un résultat classique de Kostant dans [62, Th. 5.7.1, Cor. 1], l'orbite coadjointe (X_λ, ω) est préquantifiée par $(L_\lambda, h^{L_\lambda}, \nabla^{L_\lambda})$ au sens de (1.1.4), et l'application moment de la Proposition 1.4.5 coïncide avec celle de la Définition 1.4.4. D'autre part, suivant par exemple [9, p. 257], l'espace homogène $X_\lambda \simeq G/T$ est muni d'une structure complexe naturelle préservée par G et on peut ainsi considérer la quantification holomorphe $\mathscr{H}_p$ de la Définition 1.1.1 pour tout $p \in \mathbb{N}$, qui est naturellement munie d'une action unitaire de G induite par son action sur X_λ. On a alors la réinterprétation suivante dûe à Kostant dans [62] d'un célèbre résultat dû à Borel et Weil, qui constitue la pierre angulaire de ce que l'on appelle la *méthode des orbites* en théorie des représentations, et pour lequel on pourra se référer par exemple à [1, § 4.3].

Théorème 1.4.6. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ régulier et entier, l'action de G sur la quantification holomorphe de l'orbite coadjointe (X_λ, ω) préquantifiée par $(L_\lambda, h^{L_\lambda}, \nabla^{L_\lambda})$ coïncide avec la représentation irréductible de G de* plus haut poids $\lambda \in \mathfrak{t}^*$.

Chapitre 2

Cadre général pour la quantification de Berezin-Toeplitz

La théorie de Ma et Marinescu [69, 70, 71] permet d'étendre la correspondance classique-quantique du Théorème 1.1.4 pour y inclure la quantification des *fibrés vectoriels* d'une part, et de considérer le cas d'une structure *presque* complexe $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$ générale compatible avec ω d'autre part, ce qui permet de considérer la quantification des variétés *symplectiques non-Kähleriennes*. Bien que nous n'allons pas l'introduire dans ce mémoire, la théorie de Ma et Marinescu permet aussi de considérer les cas des variétés orbifoldes et non-compactes, ce qui sera exploité à la Section 6.2 du Chapitre 6.

En Section 2.1, nous présentons la quantification holomorphe d'un fibré vectoriel hermitien (E, h^E), ainsi que l'interprétation que nous en faisons avec Polterovich dans [K] comme la *quantification d'une fibration symplectique*. Nous interprétons alors la quantification de Berezin-Toeplitz d'une section $F \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ des endomorphismes de E, définie d'une façon analogue à la Définition 1.1.3, comme la quantification d'un *système hybride quantique-classique*.

En Section 2.2, je présente une approche pour la quantification d'une variété symplectique compacte préquantifiée munie d'une structure presque complexe $J \in \mathrm{End}(TX)$ compatible avec ω, pour laquelle les espaces d'états quantiques sont donnés par les petites valeurs propres d'un *laplacien de Bochner renormalisé*. Nous énonçons ensuite la correspondance classique-quantique dans ce cadre, tirée de mes travaux en collaboration avec Wen Lu, Xiaonan Ma et George Marinescu dans [B].

En Section 2.3, je présente les cas d'intérêts géométriques de la quantification des fibré vectoriels, en particulier celui de la *correction métaplectique*, qui s'avère être une correction indispensable pour obtenir des limites semi-classiques ne dépendant que de la variété symplectique (X, ω), et celui des *produits L^2 à poids*, qui jouera un rôle crucial dans les applications géométriques du Section 4.1.

2.1 Quantification des fibrés vectoriels

Considérons une variété Kählerienne compacte (X, ω, J) préquantifié par (L, h^L, ∇^L) au sens de (1.1.4) comme en Section 1.1, ainsi qu'un fibré vectoriel holomorphe hermitien (E, h^E) muni de sa connexion de Chern ∇^E. Dans [K], nous interprétons un tel fibré vectoriel comme la *quantification dans les fibres* d'une submersion holomorphe *préquantifiée* $\pi : M \to X$, au sens où M est muni d'un fibré en droites holomoprhe hermitien $(\mathscr{L}, h^{\mathscr{L}})$ dont la connexion de Chern $\nabla^{\mathscr{L}}$ préquantifie chaque fibre de $\pi : M \to X$ comme en (1.1.4). Sous certaines hypothèses naturelles d'annulation en cohomologie, on peut alors considérer le fibré vectoriel hermitien (E, h^E) dont la fibre au-dessus de $x \in X$ est donnée par l'espace des sections holomorphes dans la fibre

$$E_x := H^0(\pi^{-1}(x), \mathscr{L}|_{\pi^{-1}(x)}) \,, \tag{2.1.1}$$

et où h^E est le produit L^2 correspondant comme en (1.1.9). On peut toujours se ramener à une telle situation en considérant la submersion holomorphe $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ donnée par le projectivisé de E.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, considérons le produit tensoriel $E \otimes L^p$ muni de la métrique $h^{E \otimes L^p}$ induite, et posons la définition suivante.

Définition 2.1.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification holomorphe* de (E, h^E) au-dessus de $(X, p\,\omega)$ préquantifié par $(L^p, h^{L^p}, \nabla^{L^p})$ est l'espace de Hilbert $\mathscr{H}_p^E$ défini par

$$\mathscr{H}_p^E := \Big(H^0(X, E \otimes L^p), \langle \cdot, \cdot \rangle_p \Big) \,, \tag{2.1.2}$$

où $H^0(X, E \otimes L^p)$ est l'espace des sections holomorphes de $E \otimes L^p$, muni du *produit* L^2 induit par restriction du produit défini sur les sections lisses $s_1,\ s_2 \in \mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p)$ par

$$\langle s_1, s_2 \rangle_p := \int_X h^{E \otimes L^p}(s_1(x), s_2(x))\, dv_X(x) \,, \tag{2.1.3}$$

Dans le cadre où (E, h^E) est obtenu comme la quantification dans les fibres d'une submersion holomorphe $\pi : M \to X$ préquantifiée par $(\mathscr{L}, h^{\mathscr{L}}, \nabla^{\mathscr{L}})$, on montre facilement que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathscr{H}_p^E = H^0(M, \mathscr{L} \otimes \pi^* L^p) \,, \tag{2.1.4}$$

où le membre de droite est muni du produit L^2 comme en (1.1.9), mais en remplaçant la forme volume de Liouville (1.1.2) par la forme volume sur M obtenue comme le produit des formes volumes Liouville de la fibre et de la base. Nous reviendrons au cas de la quantification associée à une forme volume quelconque en Section 2.3. La Définition 2.1.1 peut ainsi être interprétée comme une quantification de $(M, \omega^M + p\,\omega)$, où $\omega^M \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$ est la forme définie sur M par la condition de préquantification (1.1.4) pour le fibré $(\mathscr{L}, h^{\mathscr{L}}, \nabla^{\mathscr{L}})$.

Définition 2.1.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification de Berezin-Toeplitz* du fibré holomorphe hermitien (E, h^E) au-dessus de la variété Kählerienne $(X, p\,\omega, J)$ préquantifiée par $(L^p, h^{L^p}, \nabla^{L^p})$ est l'application linéaire $T_p^E : \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E)) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^E)$ envoyant une section $F \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E))$ des endomorphismes hermitiens de E sur l'endomorphisme $T_p^E(F) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}^E)$ défini comme la restriction de l'opérateur agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p)$ par

$$T_p^E(F) := P_p^E F P_p^E \,, \tag{2.1.5}$$

où $P_p^E : \mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p) \to \mathscr{H}_p$ est l'opérateur de projection orthogonale par rapport au produit (2.1.3) et où F est l'opérateur d'application de l'endomorphisme F point par point.

Là encore, la formule (2.1.5) implique immédiatement l'inégalité $\|T_p^E(F)\|_p \leqslant \|F\|_\infty$, où $\|\cdot\|_p$ désigne la norme d'opérateur sur $\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^E)$ et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme uniforme sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ pour la norme opérateur sur $\mathrm{Herm}(E)$.

Dans le cadre où (E, h^E) est obtenu comme la quantification dans les fibres d'une submersion holomorphe $\pi : M \to X$ préquantifiée par $(\mathscr{L}, h^{\mathscr{L}}, \nabla^{\mathscr{L}})$, on peut considérer l'application $T_\pi : \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E))$ induite par la quantification de Berezin-Toeplitz de chaque fibre $(\pi^{-1}(x), \omega^M|_{\pi^{-1}(x)})$ de $\pi : M \to X$, et à travers l'identification (2.1.4), nous montrons dans [K, Prop. 2.9] que la composition

$$T_p^E \circ T_\pi : \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E)) \,, \tag{2.1.6}$$

coïncide avec la quantification de Berezin-Toeplitz de $(M, \omega^M + p\pi^*\omega)$ pour la mesure produit. Cela peut s'interpréter comme une *quantification par étapes* de $(M, \omega^M + p\pi^*\omega)$, où l'on quantifie d'abord les fibres de $\pi : M \to X$ afin d'obtenir le *système hybride quantique-classique* donné par (E, h^E) au-dessus de $(X, p\,\omega)$, puis en lui appliquant ensuite le procédé de quantification de la Définition 2.1.2.

On a alors l'extension suivante du Théorème 1.1.4, dûe à Ma et Marinescu dans [71, 72] à travers la version générale du Théorème 1.2.5 de Dai, Liu et Ma pour les fibrés vectoriels.

Théorème 2.1.3. *[71, Th. 1.1], [72, Th. 0.3] Il existe une suite d'opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $F, G \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(E))$, on a les estimées suivantes au sens de la norme d'opérateur lorsque $p \to +\infty$,*

$$\begin{aligned} \|T_p(F)\|_p &= \|F\|_\infty + O(p^{-\frac{1}{2}})\,|F|_{\mathscr{C}^m}\,, \\ T_p^E(F)T_p^E(G) &= T_p^E(FG) + \sum_{r=1}^{k-1} p^{-r} T_p(C_r(F,G)) + O(p^{-k})\,|F|_{\mathscr{C}^m}\,. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ainsi que la formule suivante pour l'opérateur C_1 appliqué à $F, G \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E))$,

$$C_1(F,G) = -\frac{1}{2\pi}\langle \partial^E F, \overline{\partial}^E G\rangle_{g^{TX}} \,, \tag{2.1.8}$$

où ∂^E et $\overline{\partial}^E$ sont les parties $(1,0)$ et $(0,1)$ dans la décomposition (1.1.6) de la connexion sur $\mathrm{End}(E)$ induite par ∇^E et où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{g^{TX}}$ est l'accouplement à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$ induit par g^{TX} sur $T^*X \otimes \mathrm{End}(E)$.

Dans le cas où $F, G \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E))$ sont à valeurs scalaires, le coefficient (2.1.8) est aussi à valeurs scalaires, et on retrouve la dernière estimée de (1.1.14) établissant entre dynamiques classiques et quantiques à la limite semi-classique $p \to +\infty$. Comme expliqué par Ma et Marinescu dans [71, Dem. du Th. 4.19], on obtient aussi dans ce cas une erreur en $O(p^{-1})$ pour la première estimée de (2.1.7), et on retrouve ainsi l'intégralité de la correspondance classique-quantique (1.1.14).

Dans le cadre où (E, h^E) est obtenu comme la quantification dans les fibres d'une submersion holomorphe préquantifiée $\pi : M \to X$, la limite semi-classique $p \to +\infty$ est aussi appelée *limite de faible couplage*. Dans le cas où $F, G \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{Herm}(E))$ sont donnés par la quantification dans les fibres de fonctions $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, et donc que leur quantification $T_p^E(F), T_p^E(G) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^E)$ coïncide avec la quantification de $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ comme en (2.1.6), nous montrons avec Polterovich dans [K, § 5.3] comment la formule (2.1.8) approche crochet de Poisson $\{f, g\} \in \mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ de la variété symplectique $(M, \omega^M + p\pi^*\omega)$ à la limite de faible couplage lorsque $p \to +\infty$ et à la limite semi-classique dans les fibres, ce qui ne se réduit pas au Théorème 1.1.4.

2.2 Quantification presque holomorphe

Dans cette section, nous décrivons une approche pour la quantification d'une variété symplectique compacte préquantifiée générale, initiée par Ma et Marinescu dans [70]. Pour décrire cette approche, considérons une variété symplectique (X, ω) préquantifiée par (L, h, ∇^L), et rappelons qu'une telle variété admet toujours une *structure presque complexe* $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$ compatible avec ω, de sorte que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TX}$.

Dans ce cadre, on a toujours la décomposition (1.1.6) du tangent complexifié en espaces propres de J, mais on n'a plus l'existence de sections locales satisfaisant (1.1.7), et donc pas d'analogue de la structure holomorphe sur L. Par contre, il existe un analogue du *Laplacien de Kodaira* agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p)$, dont le noyau coïncide avec l'espace des sections holomorphes dans le cas Kählerien. En considérant de plus un fibré vectoriel hermitien (E, h^E) muni d'une connexion hermitienne ∇^E, cet analogue est donné par la définition suivante.

Définition 2.2.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'*opérateur de Bochner renormalisé* agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p)$ est défini dans n'importe quel repère orthonormé local $\{e_j\}_{j=1}^n$ de (TX, g^{TX}) par la formule

$$\Delta_p^E := \sum_{j=1}^{2n} \left(\left(\nabla_{e_j}^{E \otimes L^p} \right)^2 - \nabla_{\nabla_{e_j}^{TX} e_j}^{E \otimes L^p} \right) - 2\pi p n \,. \tag{2.2.1}$$

Le laplacien de Bochner renormalisé (2.2.1) est un opérateur elliptique formellement auto-adjoint sur $\mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p)$ par rapport au produit (2.1.3), et admet un spectre discret pour lequel chaque valeur propre possède une multiplicité finie. On a de plus la propriété de trou spectral suivante, dûe à de Guillemin et Uribe dans [51] pour le cas $E = \mathbb{C}$ et Ma et Marinescu dans [67] en général.

Proposition 2.2.2. *[51, Th. 2], [67, Cor. 1.2] Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\textit{Spec}(\Delta_p^E) \subset [-C, C] \cup [4\pi p - C, +\infty[\,. \tag{2.2.2}$$

Ma et Marinescu déduisent la Proposition 2.2.2 du trou spectral pour *l'opérateur de Dirac spin^c*, qu'ils établissent dans [67, Th. 1.1]. Cette propriété de trou spectral mène naturellement au espaces d'états quantiques suivants, introduits par Borthwick et Uribe dans [19] pour le cas $E = \mathbb{C}$ trivial et Ma et Marinescu dans [70] pour le cas général, étendant les Définitions 2.1.1 et 2.1.2 au cas presque complexe.

Définition 2.2.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification presque holomorphe* de (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $(X, p\,\omega, J)$ préquantifiée par $(L^p, h^{L^p}, \nabla^{L^p})$ est définie par

$$\mathscr{H}_p^E = \bigoplus_{\lambda \in [-C,C]} \operatorname{Ker}(\Delta_p^E - \lambda)\,, \tag{2.2.3}$$

muni du produit L^2 induit par restriction comme en (2.1.3), où $C > 0$ est la constante apparaissant dans la Proposition 2.2.2.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit de même la *quantification de Berezin-Toeplitz* associée de la même manière qu'en Définition 2.1.2. Les approches de Borthwick et Uribe dans [19] et de Ma et Marinescu dans [70] consistent toutes deux à obtenir les espaces (2.2.3) à partir du noyau de l'*opérateur de Dirac spin^c* par projection sur les formes de degré 0. À partir de la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch appliquée à l'opérateur de Dirac spin^c, ils montrent l'identité suivante, pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand,

$$\dim \mathscr{H}_p^E = \int_X \operatorname{Td}(X, J)\, \operatorname{ch}(E)\, e^{p\,\omega}\,, \tag{2.2.4}$$

où $\operatorname{ch}(E) \in H(X, \mathbb{R})$ représente le *caractère de Chern* du fibré vectoriel complexe E au-dessus de X. En particulier, la Définition 2.2.3 de la quantification presque holomorphe ne dépend pas de la constante $C > 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, et la loi de Weyl (1.1.11) vaut pour la quantification presque holomorphe. Dans le cas particulier où (X, ω, J) est une variété Kählerienne et où (E, h^E) est un fibré holomorphe hermitien muni de sa connexion de Chern ∇^E, on retrouve le cadre de la Section 2.1.

Dans le cas général, à la suite des travaux de Borthwick et Uribe dans [19], nous avons développé la correspondance classique-quantique dans un travail en collaboration avec Lu, Ma et Marinescu dans [B], obtenant ainsi le résultat suivant.

Théorème 2.2.4. *[B, Th. 1.2, Th. 1.5] Les Théorèmes 1.1.4 et 2.1.3 valent pour la quantification presque holomorphe de la Définition 2.2.3.*

Le Théorème 2.2.4 a d'abord été établi par Borthwick et Uribe dans [19, Th. 3.4] dans le cas $E = \mathbb{C}$, mis à part pour la formule (2.1.8) pour l'opérateur bi-différentiel C_1. Le calcul de cette formule est basé sur mes travaux dans [A], où je calcule l'opérateur bi-différentiel C_1 dans le cadre de la *quantification spin^c* introduite par Ma et Marinescu dans [71], qui consiste à considérer les espaces d'états quantiques donnés par le noyau de l'opérateur de Dirac spin^c. La démonstration du Théorème 2.2.4 est basé sur l'extension du Théorème 1.2.5 pour la quantification presque holomorphe, développé par Ma et Marinescu dans [70] et Lu, Ma et Marinescu dans [66]. Cette extension du Théorème 1.2.5 implique en particulier le développement asymptotique du noyau de Bergman le long de la diagonale comme au Théorème 1.2.3, qui a d'abord été établi dans ce cadre par Ma et Marinescu dans [70, Th. 0.1].

Une autre approche du cas presque complexe pour $E = \mathbb{C}$ trivial, développée par Guillemin dans [46] et Schiffman et Zelditch dans [88], consiste à construire un espace de sections presque holomorphes comme image d'un *projecteur de Szegö*, suivant les travaux de Boutet de Monvel et Guillemin dans [21]. Cependant, cette construction n'est ni canonique, ni explicite. Charles développe dans [30] une approche générale qui s'applique à toutes ces constructions dans le cas où $E = \mathbb{C}$ est trivial, sur la base des travaux de Boutet de Monvel et Sjöstrand dans [22].

2.3 Variantes géométriques

La quantification géométrique présentée en Section 1.4 s'étend sans difficulté à la quantification des fibrés vectoriels présentée en Section 2.1, ainsi qu'à la quantification presque holomorphe présentée en Section 2.2, dès que la dynamique hamiltonienne $\varphi_t : X \to X$ associée à une fonction lisse $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ comme en (1.1.1) se relève au fibré vectoriel (E, h^E, ∇^E) en un flot $\varphi_t^E : E \to E$ préservant métrique et connexion, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En effet, si $\varphi_{t,p}^E : \mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p) \to \mathscr{C}^\infty(X, E \otimes L^p)$ désigne le flot induit sur les sections comme en (1.4.1) pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut définir la *quantification géométrique de Kostant-Souriau* de $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ par analogie avec la formule (1.4.5), comme l'endomorphisme hermitien $Q_p^E(f) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^E)$ agissant sur $s \in \mathscr{H}_p^E$ par la formule

$$Q_p^E(f)\, s := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} P_p^E \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi_{t,p}^E\, s\,. \tag{2.3.1}$$

Une généralisation directe de la Proposition 1.4.2 montre que (2.3.1) forme un opérateur de Toeplitz (1.2.15), avec terme dominant donné par la quantification de Berezin-Toeplitz de $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ au sens de la Définition 2.1.2.

Dans le cas particulier où $\varphi_t : X \to X$ préserve une structure presque complexe compatible $J \in \mathrm{End}(TX)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, tout le reste de la Section 1.4 s'étend immédiatement au cadre des fibrés vectoriels. L'extension du Théorème 1.4.6 dans ce cadre fait alors l'objet du *théorème de Borel-Weil-Bott*, comme exposé par exemple dans [1, § 4.3], et le point de vue de la quantification par étapes des fibrations symplectiques exposé en Section 2.1 a été développé dans ce cadre par Guillemin, Lerman et Sternberg dans [48].

Un cas d'intérêt particulier est celui où $E = K_X^{1/2}$ est une racine du *fibré canonique* (1.2.11) de (X, J), munie de la métrique $h^{K_X^{1/2}}$ et connexion hermitienne $\nabla^{K_X^{1/2}}$ induites, appelée *correction métaplectique*. Comme nous le verrons à de nombreuses reprises dans ce mémoire, son addition permet d'obtenir des estimées semi-classiques lorsque $p \to +\infty$ dont le terme dominant ne dépend que de la structure symplectique. Un calcul direct, suivant par exemple [26, Th. 1.5], montre que l'opérateur (2.3.1) est alors donné par la définition suivante.

Définition 2.3.1. Soit (X, ω) une variété symplectique compacte préquantifiée par (L, h^L, ∇^L) admettant une racine carré de son fibré canonique (1.2.11). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la *quantification de Kostant-Souriau métaplectique* est l'application linéraire

$$\begin{aligned} Q_p^{K_X^{1/2}} : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}) &\longrightarrow \operatorname{Herm}\left(\mathscr{H}_p^{K_X^{1/2}}\right) \\ f &\longmapsto T_p^{K_X^{1/2}}\left(f + \frac{1}{8\pi p}\Delta f\right), \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

où Δ désigne le laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ associé à la métrique riemanienne g^{TX} définie en (1.1.5).

Nous verrons au Chapitre 5 que la quantification de Kostant-Souriau métaplectique est celle qui minimise la dépendance en la structure complexe $J \in \operatorname{End}(TX)$ à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$, justifiant a priori les propriétés semi-classiques remarquables de la correction métaplectique. Dans le contexte des orbites coadjointes décrit en Section 1.4, la correction métaplectique $E = K_X^{1/2}$ est le fibré en droites défini par le caractère (1.4.14) associé à la *demi-somme des racines* $\rho \in \mathfrak{t}^*$, et d'après le Théorème 1.4.6 de Borel-Weil, l'action de G sur l'espace d'états quantiques $\mathscr{H}_p^{K_X^{1/2}}$ coïncide avec la représentation irréductible de G de plus haut poids $p\lambda + \rho \in \mathfrak{t}^*$. Cette paramétrisation des représentations irréductibles de G en ajoutant la demi-somme des racines est aussi appelée *paramétrisation de Harish-Chandra*. Les propriétés remarquables de cette paramétrisation, comme par exemple le célèbre *isomorphisme de Harish-Chandra* [53] entre le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et les polynômes G-invariant sur $\mathfrak{g}^*$, peuvent être interprétées comme une manifestation des propriétés remarquables de la correction métaplectique en quantification géométrique.

Dans [K, § 2], nous développons aussi le point de vue de la mesure quantique de la Section 1.3 pour la quantification des fibrés vectoriels en utilisant le point de vue de la quantification par étapes des fibrations symplectiques décrit en Section 2.1. Un cas particulier anodin en apparence, mais crucial pour les applications, est celui du fibré trivial $E = \mathbb{C}$ muni d'une métrique hermitienne non triviale h^E donnée par $|1|^2_{h^E} = f$, où $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ est une fonction strictement positive quelconque. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{H}_p^\nu := \mathscr{H}_p^E$ l'espace d'états quantiques associé, qui coïncide alors avec $\mathscr{H}_p$ en tant qu'espace vectoriel complexe, mais muni du produit L^2 défini pour tous s_1, $s_2 \in \mathscr{H}_p$ par

$$\langle s_1, s_2 \rangle_{\nu,p} := \int_X h^{L^p}(s_1(x), s_2(x))\, d\nu(x)\,, \tag{2.3.3}$$

où $d\nu := f\, dv_X$ est une forme volume quelconque. On peut alors considérer la fonction de densité d'états quantiques $\rho_p^\nu \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ associée, définie comme en Définition 1.2.2 pour tout $x \in X$ par

$$\rho_p^\nu(x) = \sum_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_p} |s_j^\nu(x)|^2_{h^{L^p}}\,, \tag{2.3.4}$$

où $\{s_j^\nu \in \mathscr{H}_p^\nu\}_{j=1}^{\dim \mathscr{H}_p}$ est une base orthonormée pour le produit (2.3.3). Tout le point de vue de la mesure quantique développé en Section 1.3 s'étend alors à ce cadre, en remplaçant la forme volume de Liouville (1.1.2) par la forme volume $d\nu$, et en utilisant le produit (2.3.3) ainsi que la fonction de densité d'états quantiques (2.3.4).

De plus, si on note $P_p^\nu : \mathscr{C}^\infty(X, L^p) \to \mathscr{H}_p$ la projection orthogonale associée, et en considérant son noyau de Schwartz par rapport à $d\nu$ défini pour tous $s \in \mathscr{H}_p$ et $x \in X$ par

$$P_p^\nu s(x) = \int_X P_p^\nu(x,y) s(y) d\nu(y) \,, \tag{2.3.5}$$

l'analogue de la formule (1.2.4) vaut pour la fonction de densité d'états quantiques (2.3.4), et Ma et Marinescu remarquent dans [69, § 4.1.9] que la version générale du Théorème 1.2.5 de Dai, Liu et Ma pour les fibrés vectoriels implique l'extension suivante du Théorème 1.2.3.

Théorème 2.3.2. *[33], [69, § 4.1.9] Quelle que soit la forme volume $d\nu \in \Omega^{2n}(X, \mathbb{R})$, il existe une suite de fonctions $\{g_r \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})\}_{r \in \mathbb{N}}$ telle que pour tous $x \in X$ et $m, k \in \mathbb{N}$, on a l'estimée suivante au sens de la norme $\mathscr{C}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ lorsque $p \to +\infty$,*

$$\rho_p^\nu = \sum_{r=0}^{k-1} p^{n-r} g_r + O(p^{n-k}) \,, \tag{2.3.6}$$

avec terme dominant caractérisé par la formule

$$g_0 \, d\nu = dv_X \,, \tag{2.3.7}$$

où dv_X désigne la forme volume de Liouville (1.1.2).

Le Théorème 2.3.2, ainsi que la Proposition 1.3.5 sur le développement asymptotique de la transformée de Berezin dans ce cadre, a été d'abord établi par Engliš dans [39] pour les *domaines pseudoconvexes*. Les applications géométriques de ce cadre seront exploitées dans le Chapitre 4.

Chapitre 3

Quantification des applications symplectiques

Si la correspondance classique-quantique permet de rendre compte du comportement des observables sous la dynamique quantique, l'étude de la dynamique elle même fait intervenir des problèmes autrement plus subtils, directement liés au fait qu'un flot hamiltonien ne préserve pas de structure presque complexe en général. L'objectif de ce chapitre est de faire correspondre une application symplectique agissant sur (X, ω) avec un opérateur unitaire agissant sur l'espace des états quantiques, de telle sorte que l'on retrouve l'application symplectique donnée à la limite semi-classique.

En Section 3.1, je décris une approche à ce problème initialement dûe à Hitchin dans [54], dans laquelle on identifie les différents espaces de quantification holomorphe au moyen d'un transport parallèle au-dessus d'un chemin de structure complexes. J'énonce alors mon résultat principal dans [G], qui exprime ce transport parallèle comme un *opérateur de Toeplitz* d'un espace d'états quantique à un autre. J'applique ensuite ce résultat pour établir une formule des traces semi-classique étendant l'asymptotique lorsque $p \to +\infty$ du *théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch équivariant* au cas des applications symplectiques générales.

En Section 3.2, je considère le cas motivé ci-dessus où l'application symplectique est donnée par un flot hamiltonien, et je décris mes résultats dans [C], montrant que la dynamique quantique approche bien la dynamique classique à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$, puis établissant une *formule des traces de Gutzwiller* en quantification holomorphe.

En Section 3.3, je considère le cadre initial proposé par Hitchin dans [54], en construisant les *représentations quantiques des groupes modulaires de surfaces* à travers le transport parallèle par rapport à la *connexion de Hitchin* au-dessus de l'espace de Teichmüller de la surface. Je décris alors mes résultats dans [A, Th. 1.3, Th. 1.4], où j'applique la formule des traces semi-classiques énoncée en Section 3.1 à la *Conjecture Asymptotique de Witten*.

Bien que ce chapitre se situe dans le cadre de la quantification holomorphe pour plus de simplicité, tous mes résultats décrits dans [G] et [C] valent également pour la quantification presque holomorphe de la Définition 2.2.3.

3.1 Déformations de structure complexes et quantification

Considérons une variété Kählerienne compacte (X, ω, J) préquantifiée par (L, h^L, ∇^L), ainsi qu'une *application symplectique préquantifiée* $\varphi : X \to X$, de sorte que ce difféomorphisme se relève à (L, h^L, ∇^L) préservant métrique et connexion. Si celui-ci préserve la structure complexe de (X, ω, J), on peut alors définir sa quantification $Q_p(\varphi) \in U(\mathscr{H}_p)$ d'après (1.4.3) par restriction à la quantification holomorphe $\mathscr{H}_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cependant, une application symplectique ne préserve pas de structure complexe en général, auquel cas son action induite sur $\mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ ne préserve aucun sous-espace de sections holomorphes.

Il est donc naturel de se demander à quel point la quantification dépend de la structure complexe $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$. Dans cette optique, considérons un chemin de structures complexes compatibles

$$\begin{aligned} \gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX)) \\ t &\longmapsto J_t\,. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

On obtient ainsi une fibration préquantifiée $\pi : X \times [0,1] \to [0,1]$ comme en Section 2.1, dont la quantification dans les fibres comme en (2.1.1) forme alors un fibré hermitien au-dessus de $[0,1]$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, que l'on note encore par

$$\mathscr{H}_p \subset \mathscr{C}^\infty(X \times [0,1], L^p) \longrightarrow [0,1]\,, \tag{3.1.2}$$

et dont la fibre au dessus de $t \in \mathbb{R}$ s'identifie avec l'espace $\mathscr{H}_{p,t}$ de quantification holomorphe de $(X, p\,\omega, J_t)$ préquantifiée par (L, h^L, ∇^L), pour tout $p \in \mathbb{N}$. Ce fibré est muni d'une connexion naturelle fournie par la définition suivante.

Définition 3.1.1. La *connexion* L^2 est la connexion hermitien $\nabla^{\mathscr{H}_p}$ sur le fibré quantique (3.1.2) définie au dessus de chaque $t \in [0,1]$ par la formule

$$\nabla^{\mathscr{H}_p}_{\partial_t} := P_{p,t}\partial_t P_{p,t}\,, \tag{3.1.3}$$

où $P_{p,t} : \mathscr{C}^\infty(X, L^p) \to \mathscr{H}_{p,t}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathscr{H}_{p,t}$ par rapport au produit (1.1.9) et où $\partial_t \in \mathscr{C}^\infty(X \times [0,1], T(X \times [0,1]))$ est induit par le champs de vecteur canonique de $[0,1]$.

Comme expliqué par exemple dans [14, Th 3.2], si on considère une famille de structures complexes paramétrée par une variété complexe B de manière holomorphe, de sorte que l'on obtienne une submersion holomorphe préquantifiée $\pi : M \to B$ comme en Section 2.1 dont la fibre s'identifie à (X, ω) comme variété symplectique, la connexion L^2 définie comme en Définition 3.1.1 coïncide alors avec la connexion de Chern du fibré quantique $\mathscr{H}_p \to B$ associé. Ma et Zhang montrent dans [73] que la courbure de cette connexion peut s'écrire comme un *opérateur de Toeplitz* au sens de (1.2.15), et en calculent explicitement les deux premiers termes dominants, dans le cadre général incluant un fibré vectoriel hermitien holomorphe (E, h^E, ∇^E) au-dessus de M. En particulier, leur résultat se réduit à celui de Charles dans [27, Th. 7.1] dans le cas où $E = K_X^{1/2}$ est une racine carrée du *fibré canonique relatif* (1.2.11), qui montre que cette courbure devient dans ce cas *asymptotiquement plate* à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. Ce résultat peut être interprété comme le fait que la quantification holomorphe ne dépend pas de la structure complexe à la limite semi-classique. Cela doit être mis en perspective avec les travaux fondateurs de Hitchin dans [54], r lesquels nous reviendrons en Section 3.3.

Dans [G], je m'intéresse au transport parallèle par rapport à la connexion L^2 de la Définition 3.1.1, que l'on note

$$\mathcal{T}^{\gamma}_{p,t} : \mathscr{H}_{p,0} \longrightarrow \mathscr{H}_{p,t} \, , \tag{3.1.4}$$

pour tout $t \in [0,1]$, et je développe une version en famille de la théorie de Ma et Marinescu dans [71] afin d'étudier son comportement à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. Pour décrire ce résultat, considérons le *fibré tangent holomorphe relatif* $T^{(1,0)}X$ au-dessus de la fibration préquantifiée $\pi : X \times [0,1] \to [0,1]$, défini au dessus de chaque $t \in [0,1]$ comme dans la décomposition (1.1.6) pour la variété complexe $X_t := (X, J_t)$, et muni de la connexion induite par la connexion de Levi-Civita de $X \times [0,1]$ associée à g^{TX} comme en (1.1.5) et la métrique usuelle de $[0,1]$. On note

$$\tau_t^{K_X} : K_{X_0} \to K_{X_t} \tag{3.1.5}$$

pour le transport parallèle dans le *fibré canonique relatif* (1.2.11) au dessus de $\pi : X \times [0,1] \to [0,1]$ par rapport à la connexion induite ∇^{K_X} dans les directions horizontales de la fibration. Via l'identification $T^{(0,1)}X_t \simeq T^{(1,0)*}X_t$ induite par g^{TX} pour tout $t \in [0,1]$, on note

$$\det(\overline{\Pi_t^0}) : K_{X,0} \to K_{X,t} \tag{3.1.6}$$

l'isomorphisme induit par l'unique projection $\overline{\Pi_t^0} : T^{(0,1)}X_0 \to T^{(0,1)}X_t$ satisfaisant $\operatorname{Ker} \overline{\Pi_t^0} = T^{(1,0)}X_0$ dans $TX \otimes \mathbb{C}$. J'obtiens alors le résultat suivant.

Théorème 3.1.2. *[G, Th. 1.1] Il existe une suite de fonctions $\{\mu_{j,t} \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{C})\}_{j \in \mathbb{N}}$, lisses en $t \in [0,1]$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a l'estimée suivante au sens de la norme d'opérateur lorsque $p \to +\infty$,*

$$\mathcal{T}^{\gamma}_{p,t} = \sum_{j=0}^{k-1} p^{-l} P_{p,t} \mu_{j,t} P_{p,0} + O(p^{-k}) \, , \tag{3.1.7}$$

et telle qu'à travers l'isomorphisme canonique $\operatorname{End}(K_{X,0}) \simeq \mathbb{C}$, on a

$$\overline{\mu}_{0,t}^2 = \det(\overline{\Pi_t^0})^{-1} \tau_t^{K_X} \, . \tag{3.1.8}$$

La version générale de ce résultat établie dans [G, Th. 3.16] vaut pour la quantification presque holomorphe dans les fibres d'un fibré vectoriel (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times [0,1]$, auquel cas (3.1.8) doit être composé avec le transport parallèle par rapport à ∇^E le long des directions horizontales. Dans le cas particulier d'une racine carrée $(K_X^{1/2}, h^{K_X^{1/2}}, \nabla^{K_X^{1/2}})$ du fibré canonique relatif au-dessus de $X \times [0,1]$, encore appelée *correction métaplectique*, ce transport parallèle est une racine du transport parallèle (3.1.5), et d'après (3.1.8), on obtient alors que le terme dominant du développement asymptotique associé comme en (3.1.7) ne dépend pas du chemin de structure complexe (3.1.1) choisi, retrouvant les résultats de Ma et Zhang dans [73] et de Charles dans [27] sur la platitude asymptotique de la connexion L^2 dans ce contexte.

Pour établir ce résultat, suivant Dai, Liu et Ma dans [33], j'étend dans [G, § 3.2] le Théorème 1.2.5 pour la composition d'opérateurs $P_{p,t}P_{p,0}$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui nécessite en particulier de calculer le modèle local du noyau de $P_{p,t}P_{p,0}$ à partir du modèle local (1.2.12) pour le noyau de Bergman. Suivant Ma et Marinescu dans [71], J'établis ensuite un critère pour ces opérateurs de Toeplitz étendant le Théorème 1.2.6 à ce contexte, ce qui permet de conclure.

Revenons maintenant au problème de la quantification d'une application symplectique préquantifiée $\varphi : X \to X$, et considérons un chemin de structures complexes (3.1.1) satisfaisant $J_0 := J$ et $J_1 := \varphi^* J$. L'application par tiré en arrière sur les sections $\mathscr{C}^\infty(X, L^p)$ induite par le relevé $\varphi_p : L^p \to L^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ se restreint alors en une application

$$\varphi_p^* : \mathscr{H}_{p,0} \longrightarrow \mathscr{H}_{p,1} \tag{3.1.9}$$

envoyant la fibre en $t = 0$ du fibré quantique (3.1.2) sur la fibre en $t = 1$. En gardant en tête que seul l'inverse du tiré en arrière définit une action, on pose alors la définition suivante.

Définition 3.1.3. La *quantification géométrique* de l'application symplectique préquantifiée $\varphi : X \to X$ associée à un chemin de structures complexes reliant $J_0 := J$ à $J_1 := (\varphi^{-1})^* J$ est l'opérateur unitaire défini par

$$Q_p^\gamma(\varphi) := (\varphi_p^{-1})^* \circ \mathcal{T}_{p,1}^\gamma \in U(\mathscr{H}_{p,0})\,. \tag{3.1.10}$$

Dans le cas où l'action de $\varphi : X \to X$ se relève en $\varphi^E : E_{X_0} \to E_{X_1}$ préservant métrique et connexion d'un fibré vectoriel (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times [0,1]$, on peut alors définir $Q_p^E(\varphi^{-1}) \in U(\mathscr{H}_{p,0}^E)$ de la même manière. La Définition 3.1.3 dépend bien sûr du chemin utilisé pour relier $J_0 := J$ et $J_1 := \varphi^* J$, mais dans le cas où $E = K_X^{1/2}$ est une racine carrée du fibré canonique relatif, la version générale du Théorème 3.1.2 montre que $Q_p^{K_X^{1/2}}(\varphi) \in \mathrm{End}(\mathscr{H}_p^{K_X^{1/2}})$ est indépendant du chemin à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$.

Dans [G, § 4], j'utilise le Théorème 3.1.2 pour obtenir une estimée semi-classique sur la trace de la quantification de $\varphi : X \to X$ en terme de son lieu de points fixes $X^\varphi \subset X$. Supposons que X^φ est lisse et satisfait $TX^\varphi = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{TX} - d\varphi)$. On note $\varphi^{K_X} : K_{X,0} \to K_{X,1}$ l'application naturelle induite par φ du fibré canonique de (X, J_0) au fibré canonique de (X, J_1).

Théorème 3.1.4. *[G, Th. 1.2] Soit $X^\varphi = \coprod_{j=1}^q X_j^\varphi$ la décomposition de X^φ en composantes connexes, avec $d_j = \dim X_j^\varphi$, et soit $\lambda_j \in \mathbb{C}$ la valeur constante du relevé de φ à*

L au-dessus de X^φ_j. Alors il existe des densités ν_r au-dessus de X^φ pour tout $r \in \mathbb{N}$, telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et lorsque $p \to +\infty$, on a

$$\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_p}[\varphi_p^* \circ \mathcal{T}^\gamma_{p,1}] = \sum_{j=1}^q p^{d_j/2} \lambda_j^p \left(\sum_{r=0}^{k-1} p^{-r} \int_{X^\varphi_j} \nu_r + O(p^{-k}) \right) . \tag{3.1.11}$$

Dans le cas où φ préserve un sous-fibré complexe N de (TX, J_0) au-dessus de X^φ transverse à TX^φ, on a

$$\nu_0 = (-1)^{(2n-d_j)/4} (\varphi^{K_X} \tau^{K_X,-1})^{1/2} \det{}_N (\operatorname{Id}_N - d\varphi|_N)^{-1/2} |dv|_{TX/N} \ , \tag{3.1.12}$$

pour certains choix naturel de racines carrées au-dessus de X^φ_j. La densité $|dv|_{TX/N}$ est donnée par la formule $|dv|_{TX} = |dv|_N |dv|_{TX/N}$ au-dessus de X^φ, où $|dv|_{TX}$, $|dv|_N$ sont les densités de TX, N induites par $g^{TX}_0 := \omega(\cdot, J_0 \cdot)$.

De la même manière que pour le Théorème 3.1.2, la version générale de ce résultat établie dans [G, Th. 4.3] vaut pour la quantification presque holomorphe d'un fibré vectoriel (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times [0,1]$, et dans le cas particulier où $E = K_X^{1/2}$ est une racine carrée du fibré canonique relatif, cela a pour effet d'éliminer les termes dépendant de K_X dans le terme dominant (3.1.12). Dans ce cas, le théorème ci-dessus se réduit au résultat de Charles dans [28, Th. 5.3.1], qui établit le Théorème 3.1.4 dans ce cadre et lorsque les points fixes de φ sont isolés, auquel cas le terme dominant (3.1.12) ne dépend que de la structure symplectique. Le fait de pouvoir considérer le cas d'un fibré (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times [0,1]$ quelconque, et en particulier le fibré trivial $E = \mathbb{C}$, s'avère crucial pour l'application à la conjecture asymptotique de Witten considérée en Section 3.3.

Dans le cas où $\varphi : X \to X$ préserve la structure complexe et en considérant le transport parallèle au-dessus du chemin trivial (3.1.1), sa quantification comme en Définition 3.1.3 coïncide avec celle définie en (1.4.3), et le Théorème 3.1.4 se réduit alors à l'asymptotique lorsque $p \to +\infty$ de la formule *Hirzebruch-Riemann-Roch équivariante* suivante, qui vaut pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand,

$$\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}_p}[Q_p(\varphi)] = \int_{X^\varphi} \operatorname{Td}_\varphi(T^{(1,0)}X) \operatorname{ch}_\varphi(L^p) \, , \tag{3.1.13}$$

où $\operatorname{Td}_\varphi(T^{(1,0)}X)$ représente la *classe Todd équivariante* de (X, J) et $\operatorname{ch}_\varphi(L^p)$ représente le *caractère de Chern équivariant* de L^p pour l'action induite par $\varphi : X \to X$, et dont la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch (1.1.10) consitue le cas particulier $\varphi = \operatorname{Id}$.

3.2 Quantification des flots hamiltoniens et formule de Gutzwiller

Considérons maintenant la dynamique hamiltonienne $\varphi_t : X \to X$ engendrée par une fonction lisse $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, qui d'après la Proposition 1.4.1 admet un relevé naturel à

(L, h^L, ∇^L) préservant métrique et connexion. De la même manière qu'en Section 3.1, ce flot ne préserve pas de structure presque complexe en général, mais on peut tout de même définir la dynamique quantique associée par le membre de droite la formule (1.4.4). D'autre part, en suivant la méthode de la Section 3.1, on peut considérer le transport parallèle au-dessus du chemin de structures complexes (3.1.1) donné par $J_t := \varphi_t^* J$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par un calcul direct, je montre dans [C, Lem. 3.1] le résultat suivant, qui énonce que ces deux approches coïncident.

Proposition 3.2.1. *[C, Lem. 3.1] Soit $\varphi_t : X \to X$ le flot hamiltonien engendré par une fonction lisse $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ au temps $t \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{Q}_p^{\gamma_t}(\varphi_t) = e^{-2\pi\sqrt{-1}tp\,Q_p(f)}\,, \tag{3.2.1}$$

où $Q_p(f) \in \operatorname{End}(\mathscr{H}_{p,0})$ désigne la quantification de Kostant-Souriau de la Définition 1.4.3 et où $\gamma_t : [0,1] \to \mathscr{C}^\infty(X, \operatorname{End}(TX))$ désigne le chemin de structures complexes donné par $\gamma_t(s) := \varphi_{st}^* J$.

En considérant plus généralement la quantification d'un fibré vectoriel (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times [0,1]$ *préservé par le flot* $\varphi_t : X \to X$, au sens qu'il se relève en $\varphi_t^E : E_0 \to E_t$ préservant métrique et connexion pour tout $t \in \mathbb{R}$, la Proposition 3.2.1 vaut plus généralement pour la quantification de Kostant-Souriau (2.3.1) du fibré vectoriel $(E_0, h^{E_0}, \nabla^{E_0})$ au dessus de (X, ω, J). En particulier, la correction métaplectique $(K_X^{1/2}, h^{K_X^{1/2}}, \nabla^{K_X^{1/2}})$ au-dessus de $X \times [0,1]$, qui dépend essentiellement du temps $t \in \mathbb{R}$, et est bien préservé par $\varphi_t : X \to X$ par définition de la structure complexe $J_t := \varphi_t^* J$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Via la formule (3.2.1), j'applique alors le Théorème 3.1.2 établi dans [G] pour obtenir les estimées semi-classiques suivantes sur le noyau de Schwartz de l'opérateur d'évolution quantique de la Proposition 3.2.1, qui illustre le fait que la dynamique quantique induite par l'opérateur de Kostant-Souriau approche la dynamique classique à la limite semi-classique.

Proposition 3.2.2. *[C, Prop. 1.1] Pour tout $\varepsilon > 0$, $k, m \in \mathbb{N}$ et tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $C_k > 0$ tel que pour tout $t \in K$, le noyau de Schwartz $e^{-2\pi\sqrt{-1}tp\,Q_p(f)}(x,y) \in L_x^p \otimes (L_y^p)^*$ de l'opérateur d'évolution quantique* (3.2.1) *satisfait*

$$\left| e^{-2\pi\sqrt{-1}tp\,Q_p(f)}(x,y) \right|_{\mathscr{C}^m} \leqslant C_k p^{-k} \ \text{ dès que } \ d^X(x, \varphi_t(y)) > \varepsilon\,. \tag{3.2.2}$$

De plus, il existe $a_r(t,x) \in \mathbb{C}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$, lisse en $x \in X$ et $t \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et lorsque $p \to +\infty$, on a

$$e^{-2\pi\sqrt{-1}tp\,Q_p(f)}(\varphi_t(x), x) = p^n e^{2\pi\sqrt{-1}tpf(x)} \left(\sum_{r=0}^{k-1} p^{-r} a_r(t,x) + O(p^{-k}) \right) \tau_t^{L^p}\,, \tag{3.2.3}$$

avec terme dominant a_0 satisfaisant la formule

$$a_0(t,x)^2 = \left(\det(\overline{\Pi}_{-t}^0)^{-1} \tau_{-t}^{K_X} \right)_x^{-1}\,. \tag{3.2.4}$$

Les estimées (3.2.2) et (3.2.3) valent plus généralement pour la quantification (2.3.1) associée à un fibré vectoriel général (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times \mathbb{R}$ préservé par $\varphi_t : X \to X$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. À la suite de mes travaux dans [C], Charles et Le Floch développent dans [31] une autre approche à la Proposition 3.2.2 sur la base des travaux de Charles dans [27].

La Proposition 3.2.2 montre en particulier que le noyau de Schwartz de l'opérateur d'évolution quantique (3.2.1) se concentre dans un voisinage du graphe de $\varphi_t : X \to X$ dans $X \times X$ à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$, par contraste avec le noyau de Schwartz d'un opérateur de Toeplitz (1.2.15), qui se concentre autour de la diagonale dans $X \times X$ lorsque $p \to +\infty$ d'après le Théorème 1.2.5 appliqué à la formule (1.2.5). Cela illustre le fait que la dynamique quantique approche la dynamique classique à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$, dans le sens que pour toute suite d'états quantiques $\{s_p \in \mathscr{H}_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ qui se concentre autour d'un point $x \in X$ lorsque $p \to +\infty$, la suite $\{e^{-2\pi\sqrt{-1}tp\,Q_p(f)} s_p \in \mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ se concentre autour de $\varphi_t(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé lorsque $p \to +\infty$.

J'applique ensuite les résultats de [G] à la suite d'opérateurs $g(pQ_p^E(f)) \in \mathrm{End}(\mathscr{H}_p^E)$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par

$$g(pQ_p^E(f)) := \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(t) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}tpQ_p^E(f)\right) dt\,, \tag{3.2.5}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse dont la transformée de Fourier est à support compact. Dans ce contexte, la *formule des traces semi-classique de Gutzwiller* prédit une estimée semi-classique lorsque $p \to +\infty$ de la trace $\mathrm{Tr}[g(pQ_p^E(f))]$ en fonction des orbites périodiques du flot hamiltonien de f incluses dans le niveau d'énergie $f^{-1}(0)$. Cette formule joue un rôle fondamental en théorie du *chaos quantique*, qui se propose d'étudier les comportement des systèmes classiques chaotiques à travers leur quantification.

Supposons le niveau d'énergie $f^{-1}(0) \subset X$ est de *type contact*, auquel cas il existe un voisinage $U \subset (X, \omega, J)$ qui s'identifie à un voisinage de Σ dans sa *symplectification*. En particulier, le flot hamiltonien de f coïncide avec le *flot de Reeb* de la variété de contact (Σ, α). En considérant de plus la quantification de Kostant-Souriau métaplectique de la Définition 2.3.1, j'obtiens alors la *formule des traces semi-classique de Gutzwiller* suivante dans ce contexte.

Théorème 3.2.3. *[C, Th 1.2, 1.3] Sous les hypothèses ci-dessus, et pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, il existe une suite $\{b_{j,r} \in \mathbb{C}\}_{r\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et lorsque $p \to +\infty$, on a*

$$\mathrm{Tr}\left[g(pQ_p^{K_X^{1/2}}(f))\right] = \sum_{j=1}^{m} p^{(\dim Y_j - 1)/2} g(t_j) e^{-2\pi\sqrt{-1}p\lambda_j} \left(\sum_{r=0}^{k-1} p^{-r} b_{j,r} + O(p^{-k})\right). \tag{3.2.6}$$

De plus, on a la formule suivante pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$ tel que $\dim(Y_j) = 1$,

$$b_{j,0} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{t(Y_j)}{|\det_{N_x}(\mathrm{Id}_N - d\varphi_{t_j}|_N)|^{1/2}}\,, \tag{3.2.7}$$

pour un choix naturel de racine carrée de (-1) *et quel que soit* $x \in Y_j$*, où* N *est le fibré normal* Y_j *à l'intérieur de* $Tf^{-1}(0) \subset TX$ *et où* $t(Y_j) > 0$ *est la période primitive de* Y_j *comme orbite périodique du flot dans* $f^{-1}(0)$.

Là encore, la version générale de ce résultat établie en [C, Th. 4.3] vaut pour la quantification de Kostant-Souriau (2.3.1) d'un fibré vectoriel général (E, h^E, ∇^E) au-dessus de $X \times [0,1]$ préservé par $\varphi_t : X \to X$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais le cas de la correction métaplectique $E = K_X^{1/2}$ permet d'obtenir la formule purement symplectique (3.2.7) pour le premier terme du développement asymptotique (3.2.6) lorsque $p \to +\infty$. Cela fait suite aux résultats de Boutet de Monvel et Guillemin dans [21] et Borthwick, Paul et Uribe dans [18], qui établissent une formule des traces semi-classique (3.2.6) pour la quantification de Berezin-Toeplitz sans aboutir à une formule explicite comme en (3.2.7) pour le terme dominant.

3.3 Conjecture asymptotique de Witten

Un autre contexte d'intérêt majeur pour la quantification des applications symplectiques est celui des *représentations quantiques des groupes modulaires de surfaces* à travers le transport parallèle par rapport à la *connexion de Hitchin* introduite dans [54]. Dans ce contexte, le Théorème 3.1.4 se réduit dans à la *Conjecture Asymptotique de Witten* pour ces représentations quantiques.

Pour décrire ce contexte, donnons nous une surface compacte orientée sans bord Σ de genre $g \geqslant 2$ munie d'un disque plongé $D \subset \Sigma$, fixons $m \in \mathbb{N}$ et considérons l'espace de modules $\mathscr{M}$ des classes d'équivalence de $\mathrm{SU}(m)$-connexions plates au-dessus de $\Sigma \backslash D$ avec holonomie scalaire irréductible autour du bord, modulo l'action du *groupe de jauge* $\mathscr{G} = \mathscr{C}^\infty(\mathscr{M}, \mathrm{SU}(m))$. Un vecteur tangent à un point $[A] \in \mathscr{M}$ est naturellement représenté par un élément $\alpha \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{su}(m))$ satisfaisant $d_A \alpha = 0$, où d_A est la dérivée covariante associée à la connexion plate représentée par $[A] \in \mathscr{M}$. On alors le résultat fondamental suivant.

Proposition 3.3.1. *[5, 45, 77] la* 2*-forme* $\omega^{\mathscr{M}}$ *sur* $\mathscr{M}$ *définie pour tous* $\alpha,\ \beta \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{su}(m))$ *satisfaisant* $d_A\alpha = d_A\beta = 0$ *par la formule*

$$\omega^{\mathscr{M}}([\alpha],[\beta]) = -\frac{m}{4\pi^2}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(\alpha \wedge \beta)\,, \tag{3.3.1}$$

définit une forme symplectique sur $\mathscr{M}$*, appelée* forme d'Atiyah-Bott*, et il existe un fibré en droite hermitien* (L, h^L) *naturel, appelé* fibré de Chern-Simons*, muni d'une connexion hermitienne* ∇^L *satisfaisant la condition de préquantification* (1.1.4).

Soit $f \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma \backslash D)$ un difféomorphisme de $\Sigma \backslash D$ préservant l'orientation et le bord point par point, on a un difféomorphisme induit

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathscr{M} &\longrightarrow \mathscr{M} \\ [A] &\longmapsto [f^*A] \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

qui dépend seulement de la classe d'isotopie de $f \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma, D)$, représentant ainsi un élément du *groupe modulaire* de Σ, et qui se relève naturellement à (L, h^L, ∇^L) préservant métrique et connexion, et donc préservant la forme symplectique $\omega^{\mathscr{M}}$.

La quantification holomorphe de la variété symplectique $(\mathscr{M}, \omega^{\mathscr{M}})$ préquantifiée par (L, h^L, ∇^L) comme en Proposition 3.3.1, ainsi que sa dépendance dans le choix de la structure complexe, a été étudiée en détails par Hitchin dans [54]. En particulier, un élément $\sigma \in \mathscr{T}_\Sigma$ de l'*espace de Teichmüller* de Σ, paramétrisant les structure complexes sur Σ à isotopie près, induit une structure complexe $J_\sigma \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{M}, \mathrm{End}(T\mathscr{M}))$ compatible avec la forme symplectique $\omega^{\mathscr{M}}$. Comme aux Sections 2.1 et 3.1, on peut alors considérer la fibration holomorphe préquantifiée associée, ainsi que le fibré quantique

$$\mathscr{H}_p \longrightarrow \mathscr{T}_\Sigma \tag{3.3.3}$$

comme en (3.1.2), appelé *fibré de Verlinde*, dont la fibre au dessus de $\sigma \in \mathscr{T}_\Sigma$ est donnée par la quantification holomorphe de $(\mathscr{M}, p\,\omega^M, J_\sigma)$ comme en Définition 1.1.1, pour chaque $p \in \mathbb{N}$. Il est équippé d'une connexion canonique, appelée *connexion de Hitchin* et étudiée sous deux points de vue différents par Hitchin dans [54] et Axelrod, Della Pietra et Witten dans [6]. Si on note $\mathcal{T}_p^\gamma$ le transport parallèle par rapport à cette connexion le long d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathscr{T}_\Sigma$, alors la trace $\mathrm{Tr}[\varphi_f^* \circ \mathcal{T}_p^\gamma]$ s'identifie à l'*invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev non-renormalisé* du tore de difféomorphisme Σ_f de $f \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma, D)$, comme défini dans le formalisme de Segal [86, § 4] de la théorie conforme des champs d'après la description donnée par Witten dans [98, (2.1)] en utilisant les intégrales de Feynmann.

Supposons maintenant que l'on ait un espace de modules lisse $\mathscr{M}_f$ des classes d'équivalence de $\mathrm{SU}(m)$-connexions plates au-dessus du tore de difféomorphisme $\Sigma_f \backslash (D \times S^1)$ avec holonomie scalaire irréductible fixée autour du bord, de sorte que l'application de restriction dans la fibre $r : \mathscr{M}_f \to \mathscr{M}$ soit elle aussi lisse. Celle-ci forme un revêtement au-dessus de son image $\mathscr{M}^{\varphi_f} \subset \mathscr{M}$, qui coïncide avec le lieu des points fixes de l'application symplectique (3.3.2). Pour tout $[A_f] \in \mathscr{M}_f$, l'*invariant de Chern-Simons* de $[A_f] \in \mathscr{M}_f$ est donné par la formule

$$\mathrm{CS}([A_f]) = \frac{m}{8\pi^2}\left(\mathrm{Tr}[\xi_1\xi_2] + \int_{\Sigma_f} \mathrm{Tr}\left[\alpha_f \wedge d\alpha_f + \frac{2}{3}\alpha_f \wedge \alpha_f \wedge \alpha_f\right]\right) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\,, \tag{3.3.4}$$

où la forme de connexion $\alpha_f \in \Omega^1(\Sigma_f, \mathfrak{su}(m))$ représentant $[A_f]$ est prise égale à $\xi_1 d\theta_1 + \xi_2 d\theta_2$ sur le bord de $(\Sigma/D)_f$ vue comme un tore de coordonnées $\theta_1, \theta_2 \in S^1$, avec $\xi_1, \xi_1 \in \mathfrak{su}(m)$ constants. On munit les fibres de la fibration $\pi_f : \Sigma_f \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de la métrique riemannienne hyperbolique compatible avec la structure complexe déterminée par le chemin fixé $\gamma : [0,1] \to \mathscr{T}_\Sigma$. Pour toute classe $[A_f] \in \mathscr{M}_f$, on note $[\mathrm{ad}\, A_f]$ la connexion induite sur le $\mathfrak{su}(m)$-fibré trivial au-dessus de Σ_f.

Dans [G, Lem. 5.6], je montre que la connexion de Hitchin admet une forme de connexion par rapport à la connexion L^2 donnée par un opérateur de Toeplitz au sens de (1.2.15), et en appliquant le Théorème 3.1.4 au chemin de structures complexes $\gamma : [0,1] \to \mathscr{T}_\Sigma$, j'obtiens alors l'asymptotique suivante pour l'invariant de Witten-Reshethikin-Turaev non renormalisé de Σ_f, prédite par Witten dans [98, (2.17)] pour toute variété de dimension 3.

Théorème 3.3.2. *[G, Th. 1.3] Supposons que $r : \mathscr{M}_f \to \mathscr{M}^\varphi$ est holomorphe et que φ préserve un sous-fibré complexe de $T\mathscr{M}_\sigma|_{\mathscr{M}^\varphi}$ transverse à $T\mathscr{M}^\varphi$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tel que lorsque $p \to +\infty$, on a*

$$\operatorname{Tr}[\varphi_f^* \circ \mathcal{T}_p^\gamma] = \frac{1}{m} p^{\dim \mathscr{M}_f/2} e^{2\sqrt{-1}\pi p\, \mathrm{CS}(A_f)} (\sqrt{-1})^k \int_{\mathscr{M}_f} e^{\frac{\sqrt{-1}\pi}{4}\eta^0(\operatorname{ad} A_f)} \left|\tau_{\Sigma_f}(\operatorname{ad} A_f)\right|^{1/2} + O(p^{-1}) \,, \quad (3.3.5)$$

où $\mathrm{CS}(A_f) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est la valeur localement constante de l'invariant de Chern-Simons au-dessus de $\mathscr{M}_f$, où $\eta^0(\operatorname{ad} A_f)$ est la limite adiabatique de l'invariant η de l'opérateur de signature impair associé à $\operatorname{ad} A_f$ restreint aux formes impaires au-dessus de la fibration riemannienne $\pi_f : \Sigma_f \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et où $|\tau_{\Sigma_f}(\operatorname{ad} A_f)|^{1/2}$ est la racine carré de la valeur absolue de la torsion de Reidemeister de $\operatorname{ad} A_f$, vue comme une densité sur $\mathscr{M}_f$ via la dualité de Poincaré.

Notons que les hypothèses du Théorème 3.3.2 sont automatiquement vérifiées dans le cas où $\dim \mathscr{M}_f = 0$ ou lorsque $f \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma, D)$ préserve $\sigma \in \mathscr{T}_\Sigma$. La présence de l'invariant η dans la formule (3.3.5) est une conséquence du théorème d'holonomie de Bismut et Freed dans [12, Th.3.16], ainsi que de l'étude des fibrés en droites déterminants due à Bismut, Gillet et Soulé dans [13, § 1], et dépend du chemin $\gamma : [0,1] \to \mathscr{T}_\Sigma$. Dans le cas où la surface Σ est de genre $g = 1$, le cadre développé ci-dessus devient alors entièrement explicite, et l'analogue du Théorème 3.3.2 est dû à Jeffrey dans [56].

D'après un célèbre résultat de Hitchin dans [54, Th.4.9], la connexion de Hitchin est *projectivement plate*, et le transport parallèle associé induit ainsi une identification projective naturelle entre les fibres du fibré de Verlinde (3.3.3), ce qui montre que la quantification holomorphe de l'espace de modules $(\mathscr{M}, \omega^{\mathscr{M}})$ préquantifié par (L, h^L, ∇^L) ne dépend de la structure complexe $J_\sigma \in \mathscr{C}^\infty(\mathscr{M}, \mathrm{End}(T\mathscr{M}))$ qu'à un facteur projectif près. Plus précisément, Axelrod, Della Pietra et Witten donnent un calcul explicite de sa courbure dans [6, § 4.b], montrant qu'on a une connexion plate naturelle sur le fibré vectoriel

$$\widetilde{\mathscr{H}_p} := \mathscr{H}_p \otimes \det(\overline{\partial}_\Sigma)^{-\frac{(m^2-1)p}{2(p+m)}} \longrightarrow \mathscr{T}_\Sigma \,, \quad (3.3.6)$$

au-dessus de l'espace de Teichmüller $\mathscr{T}_\Sigma$, induite par la connexion de Hitchin sur $\mathscr{H}_p$ et la connexion Chern associée à la *connexion de Quillen* du *fibré déterminant holomorphe* $\det(\overline{\partial}_\Sigma)$ de la famille universelle d'opérateurs $\overline{\partial}$ au-dessus de $\mathscr{T}_\Sigma$, sur lequel l'application (3.3.2) se relève naturellement. Dans le langage des foncteurs modulaires de [86, (5.9)], l'*invariant de Witten-Reshetikhin-Turaev normalisé* est calculé par la trace $\operatorname{Tr}_{\widetilde{\mathscr{H}_p}}[\varphi_f^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_p^\gamma]$, où $\widetilde{\mathcal{T}}_p^\gamma$ désigne le transport parallèle par rapport à cette connexion au-dessus d'un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathscr{T}_\Sigma$. L'application qui à un élément du groupe modulaire représenté par $f \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma, D)$ associe l'opérateur unitaire $\varphi_f^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_p^\gamma \in U(\mathscr{H}_p)$ est appelée une *représentation quantique du groupe modulaire*. Dans [G, Th. 1.4], je déduis du Théorème 3.3.2 l'asymptotique semi-classique suivante.

Théorème 3.3.3. *[G, Th. 1.4] Supposons que $r : \mathscr{M}_f \to \mathscr{M}^\varphi$ est holomorphe et que φ préserve un sous-fibré complexe de $T\mathscr{M}_\sigma|_{\mathscr{M}^\varphi}$ transverse à $T\mathscr{M}^\varphi$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*

tel que lorsque $p \to +\infty$*, on a*

$$\operatorname{Tr}_{\widetilde{\mathscr{H}_p}}[\varphi_f^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_p^\gamma] = \frac{1}{m} p^{\dim \mathscr{M}_f/2} e^{2\sqrt{-1}\pi p \, \mathrm{CS}(A_f)} (\sqrt{-1})^k \\ \int_{\mathscr{M}_f} e^{\frac{\sqrt{-1}\pi}{4}\rho(\operatorname{ad} A_f)} \left|\tau_{\Sigma_f}(\operatorname{ad} A_f)\right|^{1/2} + O(p^{-1}) \,, \quad (3.3.7)$$

où $\rho(\operatorname{ad} A_f)$ *est l'invariant topologique* ρ *de* $\operatorname{ad} A_f$*, défini par*

$$\rho(\operatorname{ad} A_\varphi) = \eta^0(\operatorname{ad} A_\varphi) - (m^2-1)\eta^0(0) \,. \quad (3.3.8)$$

Dans le cas où $f \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma, D)$ préserve $\sigma \in \mathscr{T}_\Sigma$, le Théorème 3.3.3 a été établi par Andersen dans [2] en utilisant la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch équivariante (3.1.13). Une autre approche, empruntée par Charles dans [29, § 7], consiste à considérer la correction métaplectique $E = K_{\mathscr{M}}^{1/2}$, ce qui ne permet de retrouver la représentation quantique qu'à un facteur projectif près, et la trace correspondante n'est alors bien définie qu'à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. De fait, dans le Théorème 3.3.3, c'est le terme dominant en $p \in \mathbb{N}$ de la puissance fractionnaire du fibré déterminant considéré en (3.3.6) qui joue le rôle de correction métaplectique pour la formule de Witten (3.3.7). Le fait que la puissance fractionnaire du fibré déterminant contient des puissances de $p \in \mathbb{N}$ de tout ordre suggère que la correction métaplectique n'est bien qu'une correction semi-classique au plus haut ordre lorsque $p \to +\infty$.

Chapitre 4

Transformée de Berezin et programme de Donaldson

Ce chapitre traite d'un projet en commun avec Leonid Polterovich sur le bruit quantique de la quantification de Berezin-Toeplitz, ainsi que ses applications à la géométrie Kâhlerienne. Ce projet a pour origine le *programme de Polterovich* dans [80] sur l'empreinte quantique de la rigidité symplectique, et aboutissent à un nouveau point de vue sur le *programme de Donaldson* dans [38] sur la quantification des métriques canoniques sur les variétés Kähleriennes.

En Section 4.1, je décris mes résultats obtenus en collaboration avec Victoria Kaminker, Leonid Polterovich et Dor Shmoish dans [D], où nous établissons une estimée semi-classique du trou spectral de la transformée de Berezin, introduite en Section 1.3 comme mesure du bruit quantique introduit par la quantification de Berezin-Toeplitz.

En Section 4.2, je présente l'interprétation que nous faisons dans [D, § 4] du programme de Donaldson pour l'approximation numérique des métriques canoniques en termes de mesure quantique, puis je montre comment notre estimée semi-classique trou spectral de la transformée de Berezin permet d'estimer la vitesse de convergence de ce procédé d'approximation. En particulier, je présente mon résultat dans [I] où je calcule ce taux de convergence dans le cas des métriques de *Kähler-Einstein*.

En Section 4.3, je décris mes résultats dans [J], où j'applique notre point de vue dans [D] aux travaux de Donaldson dans [36] sur la quantification des métriques de Kähler à *courbure scalaire constante*, étendant ces résultats aux *solitons de Kähler-Ricci*, et donnant ainsi une nouvelle preuve du résultat d'unicité de Tian et Zhu dans [93, 94].

4.1 Trou spectral de la transformée de Berezin

Dans [D, § 2], nous nous intéressons aux propriété spectrales de la transformée de Berezin introduite en Définition 1.3.4. Une version effective du célèbre *principe d'incertitude d'Heisenberg*, caractéristique des procédés de mesure quantique et que nous appelons *imprécision* dans la Section 5.1, énonce que l'opération de quantification suivi de déquantification représentée par la transformée de Berezin a pour effet de délocaliser une observable classique $f \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$, et que cette délocalisation est de l'ordre $\hbar \sim (2\pi p)^{-1}$, ce qui est illustré par la Proposition 1.3.5.

Pour décrire ce phénomène plus en détails, plaçons nous dans le cadre général introduit en Section 2.3 de la quantification holomorphe $\mathscr{H}_p^\nu$ munie du produit (2.3.3) associé à une forme volume quelconque $d\nu \in \Omega^{2n}(X,\mathbb{R})$. Ce cadre jouera un rôle central dans les applications géométriques présentées dans les sections suivantes. On note encore B_p pour la transformée de Berezin associée agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. On alors le résultat élémentaire suivant.

Lemme 4.1.1. *[D, § 2, (3.16)] Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et toute forme volume $d\nu \in \Omega^{2n}(X,\mathbb{R})$, la transformée de Berezin associée B_p agit sur une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ par la formule suivante, pour tout $x \in X$,*

$$B_p f(x) = \frac{1}{\rho_p^\nu(x)} \int_X |P_p^\nu(x,y)|^2_{h^{L^p}}\, f(y)\, d\nu(y)\,, \tag{4.1.1}$$

où $|\cdot|_{h^{L^p}}$ est la norme induite sur $L_x^p \otimes (L_y^p)^*$ par h^L pour tout $x,\, y \in X$.

En particulier, la transformée de Berezin B_p forme un opérateur de Markov*, et son extension à $L^2(X,\mathbb{C})$ admet un spectre discret de la forme*

$$\mathrm{Spec}(B_p) = \{1 = \gamma_{0,p} \geqslant \gamma_{1,p} \geqslant \gamma_{2,p} \geqslant \ldots \geqslant \gamma_{k,p} \geqslant \ldots \geqslant 0\}\,, \tag{4.1.2}$$

avec valeur propre $1 = \gamma_{0,p}$ associée aux fonctions constantes et tel que toutes ses valeurs propres strictement positives soient de multiplicité finie.

Le Lemme 4.1.1 permet d'interpréter le procédé de quantification suivie de déquantification comme une marche aléatoire, et nous nous intéressons en particulier à son *trou spectral*, défini par

$$\gamma(B_p) := 1 - \gamma_{1,p}\,. \tag{4.1.3}$$

D'après la Définition 1.3.2 du tunnel quantique $\mathscr{E}_p : \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^\nu) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^\nu)$ décrivant l'évolution des observables quantiques après une mesure quantique, on montre aisément que

$$\mathrm{Spec}(\mathscr{E}_p)\backslash\{0\} = \mathrm{Spec}(B_p)\backslash\{0\}\,, \tag{4.1.4}$$

avec valeur propre $1 = \gamma_{0,p}$ associée à l'identité $\mathrm{Id}_{\mathscr{H}_p^\nu} \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p^\nu)$. Le trou spectral du Théorème 4.1.2 mesure ainsi la perturbation subie par les observables lors du procédé de mesure quantique de Berezin-Toeplitz. Plus précisément, si $A \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ représente une observable quantique, alors $\mathscr{E}(A) \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ représente l'observable obtenue après le procédé de mesure, et d'après l'identité (4.1.4), il existe des constantes $C > 0$ et $c_A \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa k-ième itération satisfait

$$\|\mathscr{E}^k(A) - c_A \mathrm{Id}\| \leqslant C(1-\gamma(B_p))^k\,. \tag{4.1.5}$$

On voit en particulier que si le trou spectral $\gamma(B_p) \in [0,1]$ est strictement positif, alors l'application répétée du procédé de mesure quantique sur une observable quantique $A \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ converge exponentiellement vite vers l'identité. Le trou spectral peut ainsi être interprété comme une mesure de la perte d'information causée par le procédé de mesure quantique.

Dans ce contexte, nous établissons l'estimée semi-classique suivante, qui donne en particulier une borne inférieure positive sur le trou spectral de la transformée de Berezin lorsque $p \to +\infty$.

Théorème 4.1.2. *[D, Th. 3.1] Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et lorsque $p \to +\infty$, on a*

$$1 - \gamma_{k,p} = \frac{\lambda_k}{4\pi p} + O(p^{-2}) \,, \tag{4.1.6}$$

où λ_k est la k-ième valeur propre du laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ associé à la métrique de Kähler g^{TX} définie en (1.1.5).

Puisque la première valeur propre du laplacien riemannien d'une variété riemannienne compacte satisfait $\lambda_1 > 0$, ce résultat confirme la fait que le procédé de mesure quantique de Berezin-Toeplitz admet un bruit quantique de l'ordre $\hbar \sim (2\pi p)^{-1}$.

La borne supérieure dans (4.1.6) suit immédiatement du développement asymptotique de la transformée de Berezin donné par la Proposition 1.3.5, mais ce développement ne peut malheureusement pas être directement appliqué pour démontrer le Théorème 4.1.2, car le terme d'erreur dépend de la norme $\mathscr{C}^4$ de la fonction f, et ne vaut pas au sens de la norme L^2. À la place, nous suivons une stratégie due à Lebeau et Michel dans [63] pour l'étude semi-classique des marches aléatoires sur les variétés riemanniennes, et qui consiste à montrer que le développement asymptotique de la Proposition 1.3.5 vaut en norme L^2 pour les k premières fonctions propres de la transformée de Berezin, pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour appliquer cette stratégie, nous avons besoin de contrôler les états propres de haute énergie de la transformée de Berezin, ce que nous accomplissons grâce à une version uniforme de l'estimée suivante, dûe à Liu et Ma dans [65].

Proposition 4.1.3. *[65], [D, Prop. 3.9] Pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ et tout $m \in \mathbb{N}$, on a l'estimée suivante au sens de la m-ième norme de Sobolev lorsque $p \to +\infty$,*

$$B_p f = e^{-\frac{\Delta}{4\pi p}} f + O(p^{-1}) \|f\|_{H^m} \,, \tag{4.1.7}$$

où $\|\cdot\|_{H^m}$ désigne la m-ième norme de Sobolev sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ et où $e^{-\frac{\Delta}{4\pi p}}$ désigne l'opérateur de la chaleur associé à g^{TX}.

Comme conséquence immédiate de ce résultat, nous confirmons dans [D, Th. 3.2] une prédiction de Donaldson dans [38, p. 608] dans le contexte de son programme d'approximation numérique des métriques canoniques sur les variétés projectives, en montrant que le spectre de l'*opérateur Q_p* introduit par Donaldson dans [38, p. 608] approche lorsque $p \to +\infty$ le spectre de l'opérateur de la chaleur lorsque la métrique de Kähler g^{TX} est à *courbure scalaire constante*. Ce résultat est à mettre en perspective avec le résultat de Fine dans [41], qui donne une estimée asymptotique sur le spectre de la quantification de la Hessienne de *l'énergie de Mabuchi* lorsque $p \to +\infty$, et qui sera évoqué dans les sections suivantes.

4.2 Itérations de Donaldson

Considérons maintenant une variété Kählerienne (X, ω, J) préquantifiée par (L, h^L, ∇^L), et fixons la structure holomorphe induite sur L comme en (1.1.7), appelé *fibré holomorphe préquantifiant* (X, ω, J). On note $\mathrm{Met}^+(L)$ l'espace des métriques *positives* sur ce fibré holomorphe préquantifiant, de sorte que pour tout $h \in \mathrm{Met}^+(L)$, la connexion de Chern de (L, h) induise une métrique de Kähler $\omega_h \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$ comme en (1.1.4). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $h^p \in \mathrm{Met}^+(L^p)$ pour la métrique induite sur le fibré holomorphe L^p préquantifiant $(X, p\,\omega, J)$.

Considérons d'autre part l'espace $\mathscr{H}_p$ des sections holomorphes de L^p, et notons $\mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ l'espace des produits hermitiens sur $\mathscr{H}_p$. On introduit alors la notion fondamentale suivante .

Définition 4.2.1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'*application de Fubini-Study*

$$\mathrm{FS} : \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p) \longrightarrow \mathrm{Met}^+(L)\,, \tag{4.2.1}$$

envoie un produit hermitien $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ sur la métrique hermitienne $\mathrm{FS}(H) \in \mathrm{Met}^+(L)$ caractérisée pour tous $s_1,\ s_2 \in \mathscr{H}_p$ et $x \in X$ par

$$\mathrm{FS}(H)^p(s_1(x), s_2(x)) := \langle \Pi_H(x)\, s_1,\ s_2\rangle_H\,, \tag{4.2.2}$$

où $\Pi_H(x) \in S(\mathscr{H}_p)$ est l'unique projecteur orthogonal par rapport à H satisfaisant la formule (1.3.10).

En considérant le produit hermitien $H_p \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ donné par le produit L^2 associé à une métrique hermitienne $h \in \mathrm{Met}^+(L)$ comme en (1.1.9) pour tout $p \in \mathbb{N}$, le Théorème 1.2.3 appliqué à la formule (1.3.11) montre que l'on a

$$\omega_{\mathrm{FS}(H_p)} \xrightarrow{p\to+\infty} \omega_h\,. \tag{4.2.3}$$

La convergence (4.2.3) est initialement dûe à Tian dans [92]. L'espace de dimension finie $\mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ peut ainsi être interprété comme une quantification de l'espace de dimension infinie $\mathrm{Met}^+(L)$, et (4.2.3) montre que la métrique quantique approche la métrique classique à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$.

Plus généralement, étant donnée une *application volume*

$$\begin{aligned} \nu : \mathrm{Met}^+(L) &\longrightarrow \Omega^{2n}(X, \mathbb{R}) \\ h &\longmapsto d\nu_h\,, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

à valeur dans les formes volumes de X, on considère l'*application de Hilbert* induite

$$\begin{aligned} \mathrm{Hilb}_\nu : \mathrm{Met}^+(L) &\longrightarrow \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p) \\ h &\longrightarrow \frac{\dim \mathscr{H}_p}{\mathrm{Vol}(d\nu_h)} \int_X h^p(\cdot,\cdot)\, d\nu_h\,. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

On a alors la définition suivante, introduite par Donaldson dans [38].

Définition 4.2.2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'*application de Donaldson* associée à l'application volume (4.2.4) est définie par

$$\mathscr{T}_\nu := \mathrm{Hilb}_\nu \circ \mathrm{FS} : \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p) \to \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)\,. \tag{4.2.6}$$

Un produit hermitien $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ est dit *ν-équilibré* s'il satisfait $\mathscr{T}_\nu(H) = H$.

Dans [D, §,4], nous faisons le lien entre la notion de métrique ν-équilibrée et les mesures quantiques de la Définition 1.3.1, à travers l'observation suivante, qui se déduit immédiatement de la Définition 4.2.2.

Lemme 4.2.3. *Pour toute application volume* (4.2.4)*, l'application de Donaldson associée comme en Définition 4.2.2 satisfait la formule suivante, pour tout produit hermitien $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$,*

$$\mathscr{T}_\nu(H) = \frac{\dim \mathscr{H}_p}{\mathrm{Vol}(X, d\nu)} \int_X \langle \Pi_H(x)\,\cdot,\cdot\rangle_H \, d\nu_{\mathrm{FS}(H)}(x)\,. \tag{4.2.7}$$

En particulier, un produit $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ est ν-équilibré si et seulement si l'application $W_H : \mathscr{B}(X) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ définie pour tout $s \in \mathscr{H}_p$ par

$$W_H(U)s := \frac{\dim \mathscr{H}_p}{\mathrm{Vol}(X, d\nu)} \int_U \Pi_H(x) s \, d\nu_{\mathrm{FS}(H)}(x) \tag{4.2.8}$$

satisfait les axiomes de la Définition 1.3.1.

Considérons maintenant le cas particulier où l'application volume (4.2.4) est constante, égale à une forme volume fixée $d\nu \in \Omega^{2n}(X, \mathbb{R})$, et fixons $p \in \mathbb{N}$. Donaldson montre alors dans [38, Prop. 3], que pour tout $H_0 \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$, il existe alors un produit ν-équilibré $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ tel que les itérations de l'application de Donaldson satisfont

$$\mathscr{T}_\nu^k(H_0) \xrightarrow{k \to +\infty} H\,; \tag{4.2.9}$$

Du plus, le produit ν-équilibré est unique à constante multiplicative près. D'autre part, à la suite de ses travaux dans [36] qui seront abordés en section suivante, Donaldson explique dans [38, p. 584] comment le Théorème 2.3.2 peut être utilisé pour montrer que les métriques ν-équilibrées convergent vers la *métrique de Yau* [99] associée à $d\nu$ à la manière de (4.2.3), qui est l'unique métrique de Kähler préquantifiée (1.1.5) dont la forme volume de Liouville (1.1.2) coïncide avec $d\nu$. Le cas d'intérêt majeur dans ce contexte est celui où le fibré canonique $K_X = \mathbb{C}$ est trivial, et donc qu'il existe une unique forme volume holomorphe $\theta \in \mathscr{C}^\infty(X, K_X)$ à constante multiplicative près, auquel cas on peut considérer la forme volume définie par

$$d\nu := \sqrt{-1}^{\,n^2} \theta \wedge \bar{\theta}\,. \tag{4.2.10}$$

La métrique de Yau associée à (4.2.10) coïncide alors avec l'unique métrique de Kähler préquantifiée (1.1.5) dont la *courbure de Ricci* satisfait $\mathrm{Ric}(g^{TX}) = 0$, aussi appelée *métrique de Calabi-Yau*. Ce cas fournit la motivation principale pour les travaux de Donaldson dans [38].

Sur la base du Lemme 4.2.3, nous explorons dans [D] les liens entre les travaux de Donaldson dans [38] décrits ci-dessus et la mesure quantique (4.2.8). D'une part, on vérifie immédiatement que la différentielle de l'application de Fubini-Study de la Définition 4.2.1 coïncide avec son symbole (1.3.5), tandis que la différentielle de l'application de Hilbert (4.2.5) coïncide avec la quantification (1.3.4) associée, ce qui implique en particulier que la différentielle $D_H\mathscr{T}_\nu$ agissant sur $\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ de l'application de Donaldson en un produit ν-équilibré $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ satisfait

$$D_H\mathscr{T}_\nu = \mathscr{E}_H \,, \tag{4.2.11}$$

où $\mathscr{E}_H : \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ est associé comme en Définition 1.3.2. À travers l'identité des spectres (4.1.4), le Théorème 4.1.2 implique alors le raffinement suivant du résultat de convergence de Donaldson, confirmant ainsi une prédiction de Donaldson dans [38, § 4.1] sur la vitesse de convergence de (4.2.9).

Corollaire 4.2.4. *[D, Th. 4.4, Rmk. 4.9] Considérons l'application volume* (4.2.4) *constante égale à une forme volume fixée $d\nu \in \Omega^{2n}(X,\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $H_0 \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$, il existe un produit ν-équilibré $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$, et des constantes $C_p > 0$ et $\beta_p \in]0,1[$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{dist}\left(\mathscr{T}_p^k(H_0)\,,\,H_p\right) \leqslant C_p\beta_p^k \,. \tag{4.2.12}$$

De plus, la plus petite constante $\beta_p \in]0,1[$ pour laquelle l'inégalité (4.2.12) *est valide pour tout $k \in \mathbb{N}$ satisfait l'estimée suivante lorsque $p \to +\infty$,*

$$\beta_p = 1 - \frac{\lambda_1}{4\pi p} + O(p^{-2}) \,. \tag{4.2.13}$$

où $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre positive du laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ associé à l'unique métrique de Kähler préquantifiée (1.1.5) *dont la forme volume de Liouville* (1.1.2) *coïncide avec $d\nu$.*

Nous expliquons de plus dans [K, § 4.3] comment le Corollaire 4.2.4 peut aussi être déduit de l'asymptotique lorsque $p \to +\infty$ du spectre de la quantification du laplacien établie par Keller, Meyer et Seyyedali dans [60], à la suite des travaux de Fine dans [41]. Notre approche donne ainsi une interprétation naturelle de leur résultat en terme de quantification de Berezin-Toeplitz.

D'autre part, Donaldson étudie dans [38, § 2.2] les cas particuliers importants où le fibré holomorphe préquantifiant satisfait $L = K_X^{\pm 1}$, de sorte qu'il soit donné soit par le fibré canonique (1.2.11), soit par son dual $K_X^{-1} = K_X^*$, encore appelé *fibré anticanonique*. Dans ce contexte, on considère l'application volume (4.2.4) qui envoie une métrique positive $h \in \mathrm{Met}^+(L)$ sur la forme volume définie pour n'importe quelle trivialisation holomorphe $\theta \in H^0(U, K_X)$ au-dessus de tout ouvert contractile $U \subset X$ par la formule

$$d\nu_h := \sqrt{-1}^{n^2}\,\frac{\theta \wedge \bar\theta}{|\theta|^2_{h^{\pm 1}}} \,, \tag{4.2.14}$$

appelée *forme volume (anti)canonique*, où $h^{-1} = h^*$ désigne la métrique duale sur K_X. Dans ce contexte, un produit ν-équilibrée $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ au sens de la Définition 4.2.2 est appelé *(anti)canoniquement équilibrée*, et une métrique de Kähler préquantifiée (1.1.5) est à courbure scalaire constante si et seulement si elle satisfait l'*équation de Kähler-Einstein* suivante,

$$\mathrm{Ric}(g^{TX}) = \mp g^{TX} \,. \tag{4.2.15}$$

J'obtiens alors le résultat suivant, qui confirme une prédiction de Donaldson dans [38, § 2.2] sur la vitesse de convergence comparée des itérations du système dynamique (4.2.7) associé aux différentes notions de produits équilibrés.

Théorème 4.2.5. *[I, Th. 1.2] Supposons que g^{TX} préquantifiée par $L = K_X^{\pm 1}$ comme en* (1.1.5) *satisfasse l'équation de Kähler-Einstein* (4.2.15) *et que le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X)$ soit discret. Alors pour tout $H_0 \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$, il existe un produit (anti)canoniquement équilibré $H \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ satisfaisant* (4.2.12) *avec plus petite constante de convergence exponentielle $\beta_p \in]0,1[$ donnée par*

$$\beta_p = 1 - \frac{\lambda_1 \pm 4\pi}{4\pi p} + O(p^{-2}) \,, \tag{4.2.16}$$

où $\lambda_1 > 0$ est la première valeur propre positive du laplacien riemannien agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ associé à la métrique de Kähler-Einstein g^{TX}.

D'après un résultat classique dû à Lichnerowicz dans [64] et Matsushima dans [75], sous les hypothèses du Théorème 4.2.5 dans le cas anticanonique $L = K_X^{-1}$, la première valeur propre positive du laplacien riemannien associé à la métrique de Kähler-Einstein satisfait $\lambda_1 > 4\pi$. L'estimée (4.2.16) montre donc bien un taux de convergence exponentiel contrôlé à la limite lorsque $p \to +\infty$ pour les itérations de l'application de Donaldson. Comme pour le Corollaire 4.2.4, j'établis le Théorème 4.2.5 comme une conséquence du Théorème 4.1.2. Le correction en $\pm 4\pi$ vient de la correction analogue dans la formule (4.2.11) pour la différentielle de l'application de Donaldson, qui provient de la différentielle de la forme volume (anti)canonique (4.2.14) par rapport au choix de la métrique $h \in \mathrm{Met}^+(L)$. On constate ainsi que la vitesse de convergence des itérations de l'application de Donaldson diminue à mesure que la courbure (4.2.15) devient positive, ce qui confirme d'autant les prédictions numériques de Donaldson dans [38].

D'autre part, en collaboration avec Leonid Polterovich dans [K], nous calculons la taux de convergence des itérations de l'application de Donaldson dans le cas de la notion originale de produit équilibré introduite par Donaldson dans [36, 37], qui correspond au cas où l'application volume (4.2.4) envoie $h \in \mathrm{Met}^+(L)$ sur la forme volume de Liouville (1.1.2) associée à $\omega_h \in \Omega^2(X, \mathbb{R})$. Sous l'hypothèse que g^{TX} est à *courbure scalaire constante* et que le groupe d'automorphisme de (X, L) est discret, la convergence (4.2.9) a été établie par Donaldson dans [37], et nous montrons dans [K, Th. 1.2.(2)] que l'analogue du Théorème 4.2.5 vaut dans ce contexte, avec plus petite constante de convergence exponentielle $\beta_p \in]0,1[$ comme dans (4.2.12) satisfaisant

$$\beta_p = 1 - \frac{\mu_1}{8\pi p^2} + O(p^{-3}) \,, \tag{4.2.17}$$

où $\mu_1 > 0$ est la première valeur propre positive de l'opérateur de *variation de courbure scalaire* associé à g^{TX}. Nous expliquons de plus dans [K, § 4.3] comment l'estimée (4.2.17) peut aussi être déduit de l'asymptotique lorsque $p \to +\infty$ du spectre de la Hessienne de la quantification de l'énergie de Mabuchi établie par Fine dans [41]. Là encore, notre approche donne une interprétation naturelle de ce résultat en terme de la quantification de Berezin-Toeplitz.

Pour finir, nous obtenons dans [K, Th. 1.2.(1)] l'analogue du Corollaire 4.2.4 dans le cas des fibrés vectoriels, en utilisant la notion de produit équilibré dûe à Wang dans [97], auquel cas le taux de convergence est contrôlé par la première valeur propre du *laplacien de Kodaira* sur $\mathrm{End}(E)$ associé à la *métrique de Hermite-Einstein* sur un fibré vectoriel stable E. Pour cela, nous développons le point de vue de la mesure quantique présenté dans le cadre de la quantification par étapes des fibrations symplectiques évoquée en Section 2.1. Nous expliquons finalement dans [K, § 4.3] comment ce résultat peut aussi être déduit du résultat de Keller, Meyer et Seyyedali dans [60].

4.3 Quantification des métriques de Kähler canoniques

Après nos travaux dans [D, § 4], j'explore dans [I, J] les applications du Théorème 4.1.2 sur le trou spectral de la transformée de Berezin au *programme de Donaldson* pour l'étude des métriques canoniques en géométrie Kählerienne. Ce programme est basé sur la notion de produit équilibré, comme en la Définition 4.2.2 pour l'application volume (4.2.4) donnée par la forme volume de Liouville (1.1.2). Le résultat fondateur suivant, dû à Donaldson dans [36], peut alors être pensé comme un raffinement du résultat de convergence de Tian (4.2.3) pour les métriques canoniques.

Théorème 4.3.1. *[36] Supposons que la métrique de Kähler préquantifiée* (1.1.5) *ait* courbure scalaire constante *et que le groupe d'automorphisme de (X, L) soit discret. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, il existe un unique produit équilibrée $H_p \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ à constante multiplicative près, et on a la convergence suivante au sens de la norme $\mathscr{C}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ lorsque $p \to +\infty$,*

$$\omega_{FS(H_p)} \xrightarrow{p\to+\infty} \omega\,. \tag{4.3.1}$$

Comme corollaire principal de ce résultat, Donaldson obtient dans [36] l'unicité de la métrique à courbure scalaire constante parmi les métriques de Kähler préquantifiées (1.1.5), comme conséquence de l'unicité des produits équilibrés pour chaque $p \in \mathbb{N}$. Cela peut être interprété comme un résultat semi-classique lorsque $p \to +\infty$, la notion de produit équilibré étant alors interprétée comme la quantification de la notion de métrique de Kähler à courbure scalaire constante.

Le lien entre le Théorème 4.3.1 et la quantification de Berezin-Toeplitz provient du résultat élémentaire mais fondamental suivant, qui suit immédiatement de l'extension de la formule (1.3.11) à des formes volumes quelconques.

Lemme 4.3.2. *Quelle que soit l'application volume* (4.2.4) *et quel que soit $p \in \mathbb{N}$, un produit $H_p \in \mathrm{Prod}(\mathscr{H}_p)$ est ν-équilibré si et seulement s'il existe une constante $c_p \in \mathbb{R}$*

tel que la fonction de densité d'états quantiques $\rho_p^\nu \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ *associée à la métrique* $h^L := \mathrm{FS}(H_p)$ *et à la forme volume* $d\nu := d\nu_{\mathrm{FS}(H_p)}$ *comme en* (2.3.4) *satisfait*

$$\rho_p^\nu \equiv c_p\,. \tag{4.3.2}$$

Dans le cas où l'application volume (4.2.4) est donnée par la forme volume de Liouville (1.1.2), le développement asymptotique de la fonction de densité d'états $\rho_p \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ énoncé en Théorème 1.2.3 montre que, si la métrique de Kähler préquantifiée (1.1.5) est à courbure scalaire constante, alors la fonction de densité d'états quantiques est une fonction constante à l'ordre 2 lorsque $p \to +\infty$. La stratégie de Donaldson pour établir le Théorème 4.3.1 consiste à exploiter cette propriété pour construire par approximations successives des métriques dont la fonction de densité d'états est une fonction constante à l'ordre k lorsque $p \to +\infty$, pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Cela fait intervenir en particulier l'opérateur de variation de courbure scalaire apparaissant dans le (4.2.17). La suite de la démonstration, qui en est la partie la plus délicate, consiste ensuite à montrer que les métriques presque équilibrées ainsi construites sont proches de métriques équilibrées. Cela revient en fait à établir une borne inférieure sur la première valeur propre de la Hessienne de la quantification de l'énergie de Mabuchi introduite par Fine [41], borne qui a été par la suite améliorée par Phong et Sturm dans [79], et dont l'estimée précise a finalement été calculée par Fine dans [41, Th. 3], montrant que borne calculée par Phong et Sturm dans [79, Th. 2] est optimale. Comme expliqué dans [K, Prop. 4.22], ce trou spectral coïncide avec le trou spectral de la différentielle de l'application de Donaldson, et l'on retrouve donc cette estimée comme une conséquence de l'estimée (4.2.17) que nous établissons dans [K, Th. 1.2.(2)].

L'analogue du théorème de Donaldson pour l'application volume canonique a été établi par Tsuji dans [95] et Berndtsson, et pour l'application volume par Berman, Boucksom, Guedj et Zeriahi dans [10] et Takahashi dans [91, Th. 1.3]. De fait, dans le cas où le fibré holomorphe préquantifiant satisfait $L = K_X^{\pm 1}$, un calcul direct montre qu'une métrique de Kähler $\omega_h \in \Omega^2(X,\mathbb{R})$ associée à $h \in \mathrm{Met}^+(L)$ satisfait l'équation de Kähler-Einstein (4.2.15) si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{\omega_h^n}{n!} = c\, d\nu_h\,. \tag{4.3.3}$$

Le Théorème 2.3.2 montre que $\rho_p^\nu \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ est constant à l'ordre 1 lorsque $p \to +\infty$, et on peut alors appliquer la stratégie de Donaldson en utilisant le fait que l'opérateur de variation de la forme de Liouville (4.3.3) s'identifie cette au laplacian riemannien associé. Je présente alors dans [I] une nouvelle preuve de ce résultat basée sur l'estimée asymptotique trou spectral de la transformée de Berezin établie en Théorème 4.1.2. Comme je l'explique dans [I, § 4.2], il s'agit cette fois d'établir une borne inférieure sur la première valeur propre de la Hessienne de la *quantification de l'énergie de Ding* considérée par Berman, Boucksom, Guedj et Zeriahi dans [10, § 4.3], qui coïncide avec le trou spectral de la différentielle (4.2.11) de l'application de Donaldson, donc de la transformée de Berezin via l'opérateur de tunnel quantique comme en (4.1.4).

L'extension du Théorème 4.3.1 au cas d'un groupe d'automorphisme quelconque a été traitée dans un premier temps par Mabuchi dans [74]. Dans ce contexte, la notion appropriée de métrique canonique est fournie par la notion de *métrique de Kähler extrémale*. Mabuchi introduit dans [74] une notion de métrique équilibrée *relativement au groupe d'automorphismes de* (X, L), mais comme expliqué par Apostolov et Huang dans [3, Conj. 1], cette notion s'avère trop faible pour les applications. La bonne notion, qui a été dégagée par Sano et Tipler dans [84] et Seyyedali dans [87], est en fait la suivante.

Définition 4.3.3. Quelle que soit l'application volume (4.2.4), un produit hermitien $H \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ est dit *ν-équilibré relativement* à un élément $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X)$ s'il satisfait

$$\mathscr{T}_\nu(H) = e^{L_\xi/2p}\, H\,, \tag{4.3.4}$$

où $L_\eta \in \mathrm{End}(\mathscr{H}_p)$ désigne la dérivée de Lie par rapport à $\eta \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X) \subset \mathscr{C}^\infty(X, TX)$ restreinte à $\mathscr{H}_p \subset \mathscr{C}^\infty(X, L^p)$.

Dans le cas où l'application volume (4.2.4) est donnée par la forme volume anticanonique (4.2.14), un produit hermitien $H \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ satisfaisant (4.3.4) est dit *anticanoniquement équilibré relativement* à $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X)$. Cette notion a été introduite par Berman et Witt Nyström dans [11] comme une *quantification des soliton de Kähler-Ricci,*. Pour comprendre cette notion, remarquons qu'une métrique de Kähler-Einstein (4.2.15) est un exemple particulier de la notion de *soliton de Kähler-Ricci* par rapport à un champs de vecteurs holomorphe $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X)$, qui satisfait

$$\mathrm{Ric}(g^{TX}) = g^{TX} + L_\xi\, g^{TX}\,, \tag{4.3.5}$$

où L_ξ est la dérivée de Lie par rapport à $\xi \in \mathscr{C}^\infty(X, TX)$. Dans le cas où $\xi = 0$, et en particulier lorsque le groupe d'automorphisme est discret, la notion de soliton de Kähler-Ricci se réduit à la notion de métrique de Kähler-Einstein, tandis que la **??** de produit relativement ν-équilibré se réduit à la 4.2.2 de produit ν-équilibré Suivant les travaux de Berman et Witt Nyström dans [11], j'établis alors le résultat suivant, qui répond à une question de Donaldson dans [38, § 2.2.2].

Théorème 4.3.4. *[J, Th. 1.1] Supposons que la métrique de Kähler préquantifiée* (1.1.5) *soit un soliton de Kähler-Ricci* (4.3.5) *par rapport à* $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X)$*. Alors pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *suffisament grand, il existe un produit hermitien* $H_p \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ *anticanoniquement équilibré relativementà* $\xi_p \in \mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(X)$*, unique à constante multiplicative près, et on a les convergences suivantes au sens de la norme* $\mathscr{C}^m$ *pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *lorsque* $p \to +\infty$*,*

$$\xi_p \xrightarrow{p\to+\infty} \xi_\infty \qquad \textit{et} \qquad \omega_{\mathrm{FS}(H_p)} \xrightarrow{p\to+\infty} \omega\,. \tag{4.3.6}$$

À l'instar du Théorème 4.3.1, le Théorème 4.3.4 permet d'établir une nouvelle démonstration du résultat de Tian et Zhu dans [93, 94] sur l'unicité du soliton de Kähler-Ricci préquantifié à automorphisme près. D'autre part, la convergence au sens des courants dans le Théorème 4.3.4 avait déjà été établie par Berman et Witt Nyström dans [11, Th. 1.7] et Takahashi dans [90, Th. 1.2], sous l'hypothèse que l'*énergie de Ding modifiée* soit coercive à $\mathrm{Aut}_0(X)$ près. Darvas et Rubinstein montrent par ailleurs dans [34, Th. 8.1] que cette hypothèse est bien vérifiée comme conséquence de l'existence du soliton de Kähler-Ricci. Notons que leur démonstration utilise le résultat de Tian et Zhu dans [93, Th. 1.1], et cette approche ne permet donc pas d'établir une nouvelle preuve de ce résultat.

Chapitre 5

Approche axiomatique de la quantification géométrique

Avec David Kazhdan et Leonid Polterovich dans [E, H], nous adoptons une approche axiomatique de la quantification d'une variété symplectique compacte (X, ω). Cela fournit un cadre général qui embrasse toutes les variantes de la quantification de Berezin-Toeplitz traitées dans ce mémoire.

En Section 5.1, je pose ce cadre axiomatique, et montre comment celui-ci permet d'unifier les différents points de vue sur la quantification géométrique, de la quantification par déformation introduite en Section 1.1 à celui de la mesure quantique introduite en Section 1.3. Je présente ensuite notre résultat dans [E] sur les liens entre *l'imprécision* d'un procédé de mesure quantique, qui mesure l'incrément d'incertitude induit par la mesure, et le choix d'une structure complexe compatible $J \in \mathrm{End}(TX)$ sur (X, ω).

En Section 5.2, je présente le problème de *l'équivalence semi-classique* des quantifications géométriques, à savoir si les quantifications géométriques sont toutes conjuguées à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. Je présente ensuite nos résultats dans [H], où nous résolvons ce problème dans le cas de la sphère $X = S^2$ et du tore $X = \mathbb{T}^2$. Ce problème se réduit alors à un problème purement algébrique, à savoir si des *quasi-représentations* d'algèbres approximent des véritables représentations à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$, le cas de $X = S^2$ correspondant au cas de l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$, tandis que le cas de $X = \mathbb{T}^2$ correspond à l'algèbre stellaire du *tore quantique*.

5.1 Quantification géométrique et principe de moindre imprécision

Dans [H, Def. 1.6], nous définissons la quantification d'une variété symplectique compacte (X, ω) au sens large de la manière suivante, traduisant de manière axiomatique la correspondance classique-quantique énoncée au Théorème 1.1.4.

Définition 5.1.1. Une *quantification géométrique* d'une variété symplectique compacte (X,ω) est la donnée d'une suite d'applications linéaires $\{T_p : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $T_p(1) = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_p}$, avec $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ suite d'espaces hermitiens de dimension finie, telle qu'il existe une suite $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs bi-différentiels sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que les axiomes suivants sont vérifiés au sens de la norme d'opérateur lorsque $p\to+\infty$,

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{P1}) \quad \|T_p(f)\|_p = \|f\|_\infty + O(p^{-1})|f|_{\mathscr{C}^m}\ ;\\
&(\mathrm{P2}) \quad T_p(f)T_p(g) = T_p(fg) + \sum_{r=1}^{k-1} p^{-r} T_p(C_r(f,g)) + O(p^{-k})|f|_{\mathscr{C}^m};\\
&(\mathrm{P3}) \quad [T_p(f),T_p(g)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}p} T_p\left(\{f,g\}\right) + O(p^{-2})|f|_{\mathscr{C}^m}\quad .
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

où on a étendu $T_p : \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathscr{H}_p)$ par $\mathbb{C}$-linéarité pour tout $p\in\mathbb{N}$.

Un exemple fondamental de quantification géométrique d'une variété symplectique compacte (X,ω) satisfaisant $[\omega]\in H^2(X,\mathbb{R})$ est fourni par la quantification de Berezin-Toeplitz presque holomorphe de la Définition 2.2.3 associée à n'importe quelle structure presque complexe $J\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathrm{End}(TX))$, d'après le Théorème 1.1.4 ainsi que son extension au cadre presque holomorphe présenté en Section 2.2.

D'autre part, si $\{T_p : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ est une quantification géométrique de (X,ω) au sens de la Définition 5.1.1, alors pour toute collection d'opérateurs différentiels $D_1,\cdots D_r$, avec $r\in\mathbb{N}$, agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ et dont le terme d'ordre 0 s'annule, la suite d'applications linéaires $\{Q_p : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ donnée pour tout $f\in\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ par

$$Q_p(f) := T_p\Big(f + \sum_{k=1}^{r} p^{-k}\, D_k f\Big)\,, \tag{5.1.2}$$

définit aussi une quantification géométrique. En particulier, la quantification de Kostant-Souriau de la Définition 1.4.3, ainsi que sa variante métaplectique de la Définition 2.3.1, définissent des quantifications géométriques.

Remarquons d'autre part qu'une quantification géométrique induit une *quantification par déformation*, en identifiant la suite d'opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{j\in\mathbb{N}}$ de la Définition 1.1.5 avec celle donnée par l'axiome $(P2)$ de la Définition 5.1.1. Une opération de la forme (5.1.2) correspond alors à une équivalence des produits de déformation, au sens que si $*$ désigne le produit sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})[[h]]$ induit par une quantification géométrique $\{T_p : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$, alors le produit $*_D$ induit par la quantification géométrique (5.1.2) satisfait

$$f\ *_D\ g = D_\hbar^{-1}\left(D_\hbar f * D_\hbar g\right)\,, \tag{5.1.3}$$

où $D_\hbar^{-1}$ est l'inverse formel de $D_\hbar := 1 + \sum_{k=1}^r \hbar^k\, D_k$ agissant sur $\mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{C})[[h]]$.

Dans [E], nous nous restreignons aux quantifications géométriques dites *positives*, c'est à dire qui satisfont à l'axiome de positivité suivant, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$(\mathrm{P4}) \quad f \geqslant 0 \implies T_p(f) \geqslant 0\,. \tag{5.1.4}$$

L'application linéaire $T_p : C^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ définit ainsi une mesure à valeur opérateurs positifs dans $\mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$, et on vérifie alors qu'elle admet une densité comme en (1.3.4), et donc apparaît comme la quantification associée à une mesure quantique comme en (1.3.3). Dans ce contexte, toutes les notions introduites en Section 1.3 ont alors un sens, ce qui permet de poser le cadre général suivant pour la quantification de Berezin-Toeplitz, tiré de [E, Def. 2.6].

Définition 5.1.2. Une quantification géométrique au sens de la Définition 5.1.1 est appelée *quantification de Berezin-Toeplitz* si elle satisfait de plus l'axiome de positivité (5.1.4) et les deux axiomes suivants lorsque $p \to +\infty$,

$$\begin{aligned} &\text{(P5)} \quad B_p f = f + O(p^{-1})\,|f|_{\mathscr{C}^m}\,; \\ &\text{(P6)} \quad \mathrm{Tr}(T_p(f)) = p^n \int_X f\,dv_X + O(p^{-1})\,\|f\|_\infty\,, \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

où B_p est la transformée de Berezin associée comme en Définition 1.2.1.

Là encore, un exemple fondamental de quantification géométrique d'une variété symplectique compacte (X,ω) satisfaisant $[\omega] \in H^2(X,\mathbb{R})$ est fourni par la quantification de Berezin-Toeplitz associée à n'importe quelle structure presque complexe, d'après la Proposition 1.3.5 et la formule de trace (1.2.6) ainsi que leurs extensions au cadre presque holomorphe présenté en Section 2.2.

Dans ce contexte, nous définissons l'*imprécision* d'une quantification géométrique par la forme symmétrique bilinéaire G définie sur TX pour tout $f,\, g \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$ par

$$C_1(f,g) + C_1(g,f) =: -\frac{1}{2\pi} G(\xi_f,\xi_g)\,, \tag{5.1.6}$$

où $\xi_f,\, \xi_g \in \mathscr{C}^\infty(X,TX)$ sont les champs de vecteurs Hamiltoniens associés à $f,\, g$ comme en (3). Du point de vue de la mesure quantique, l'imprécision peut être interprétée comme l'incrément d'*incertitude* induit par la positivité, qui est intimement associée au bruit quantique étudié en Section 4.1. Remarquons que la formule (2.1.8) avec $E = \mathbb{C}$ établie dans le Théorème 2.2.4 montre que l'imprécision de la quantification de Berezin-Toeplitz associée à une structure presque complexe $J \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathrm{End}(TX))$ coïncide avec la métrique riemannienne g^{TX} définie par (1.1.5). Le résultat suivant montre que ceci est un fait général pour les quantifications de Berezin-Toeplitz au sens axiomatique de la Définition 5.1.2.

Théorème 5.1.3. *[E, Th. 4.1] Pour toute quantification de Berezin-Toeplitz au sens de la Définition 5.1.2, il existe une structure presque complexe $J \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathrm{End}(TX))$ compatible avec ω et une forme symétrique bilinéaire semi-positive ϱ sur TX telles que son imprécision* (5.1.6) *soit donnée par*

$$G = \omega(\cdot, J\cdot) + \varrho(\cdot,\cdot)\,. \tag{5.1.7}$$

En particulier, on a $\mathrm{Vol}(X,G) \geqslant \mathrm{Vol}(X,\omega)$*, avec égalité si et seulement si $\varrho \equiv 0$. À l'inverse, toute métrique de la forme* (5.1.7) *apparaît comme l'imprécision d'une quantification de Berezin-Toeplitz.*

La métrique riemannienne (5.1.7) est appelée *métrique d'imprécision*, et la formule (5.1.7) montre que si $\mathrm{Vol}(X, G) = \mathrm{Vol}(X, \omega)$, alors elle est de la forme (1.1.5) pour une unique structure presque complexe $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$ compatible avec ω. Ainsi, les quantifications de Berezin-Toeplitz minimisant leur imprécision déterminent une structure presque complexe compatible sur (X, ω). C'est ce que nous appelons le *principe de moindre imprécision*. Une métrique riemannienne sur une variété symplectique (X, ω) peut être interprétée comme un procédé de mesure classique, et le Théorème 5.1.3 montre alors que le procédé de mesure quantique induit par une quantification de Berezin-Toeplitz approche la mesure classique (5.1.7) sur (X, ω) à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$.

Remarquons par ailleurs que la notion d'imprécision (5.1.6) a aussi un sens pour une quantification géométrique générale au sens de la Définition 5.1.1, et pas seulement pour les quantifications de Berezin-Toeplitz. En particulier, on vérifie aisément que l'imprécision (5.1.6) de la quantification de Kostant-Souriau métaplectique de la Définition 2.3.1 s'annule identiquement, ce qui justifie a priori ses propriétés semi-classiques remarquables évoquées dans le Chapitre 3.

5.2 Quasi-représentations des algèbres de Lie

Dans [H], nous considérons le cadre axiomatique général fourni par la Définition 5.1.1, et proposons la conjecture suivante.

Conjecture 5.2.1. *[H, Conj. 1.10] Soient $\{T_p, Q_p : \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ deux quantifications géométriques d'une variété symplectique compacte (X, ω) au sens de la Définition 5.1.1 associées à la même suite d'espaces hermitiens $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$. Alors il existe une suite $\{U_p \in U(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ d'opérateurs unitaires tels que pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, on a l'estimée suivante au sens de la norme d'opérateur lorsque $p \to +\infty$,*

$$Q_p(f) = U_p^{-1} T_p(f) U_p + O(p^{-1}) . \tag{5.2.1}$$

Deux quantifications géométriques satisfaisant (5.2.1) lorsque $p \to +\infty$ sont appelées *semi-classiquement équivalentes*. La Conjecture 5.2.1 énonce ainsi que les quantifications géométriques associées à la même suite d'espaces de Hilbert sont toutes semi-classiquement équivalentes, et donc que la quantification ne dépend que de (X, ω) à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$. En particulier, deux quantifications géométriques reliées par un changement de variable (5.1.2) sont semi-classiquement équivalentes, et l'équivalence semi-classique des quantifications Berezin-Toeplitz au sens de la Définition 1.1.3 associées à différentes structures complexes découle du travail de Charles dans [27].

Dans [E], nous considérons d'abord le cadre de la sphère $X = S^2$ muni de sa forme volume usuelle. Alors l'axiome $(P2)$ implique qu'une quantification restreinte aux fonctions coordonnées de la sphère unité $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une *quasi-représentation* de $\mathfrak{su}(2)$ en un sens inspiré de Kazhdan dans [59], c'est à dire qu'elle satisfait aux relations de commutation des générateurs canoniques de $\mathfrak{su}(2)$ de manière approchée lorsque le *plus haut poids* $p \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini. La Conjecture 5.2.1 se réduit alors au résultat suivant, que nous établissons dans [E].

Théorème 5.2.2. *[H, Th. 1.2] Soit* $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite d'espace hermitiens satisfaisant* $\dim \mathscr{H}_p = p + O(1)$ *lorsque* $p \to +\infty$*, et supposons qu'il existe* $c \in \mathbb{R}$ *et une suite* $\{X_{1,p},\, X_{2,p},\, X_{3,p} \in \mathrm{End}(H_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ *de triplets d'opérateurs anti-hermitiens telle que les estimées suivantes valent au sens de la norme d'opérateurs lorsque* $p \to +\infty$*,*

(R1) $$X_{1,p}^2 + X_{2,p}^2 + X_{3,p}^2 = \left(\frac{k+c}{2}\right)^2 \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_p} + O(1)\,,$$

(R2) $$[X_{j,p}, X_{j+1,p}] = X_{j+2,p} + O(p^{-1})\,, \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,.$$

Alors on a nécessairement $c \in \mathbb{Z}$ *et* $\dim \mathscr{H}_p = p + c$ *pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *suffisament grand.*

De plus, pour chaque $p \in \mathbb{N}$*, il existe des générateurs* $Y_{1,p},\, Y_{2,p},\, Y_{3,p} \in \mathrm{End}(\mathscr{H}_p)$ *d'une représentation irréductible de* $\mathfrak{su}(2)$ *dans* $\mathscr{H}_p$*, tels que l'estimée suivante vaut sens de la norme d'opérateur lorsque* $p \to +\infty$*,*

$$X_{j,p} = Y_{j,p} + O(1)\,, \text{ pour tout } j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\,. \tag{5.2.2}$$

La démonstration du Théorème 5.2.2 repose sur la description explicite classique du spectre et des vecteurs propres des représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(2)$, déduite du fait qu'une telle représentation est uniquement déterminée par le fait de satisfaire les relations $(R1)$ et $(R2)$ de manière exacte, avec $c \in \mathbb{Z}$. Nous montrons que cette caractérisation s'étend lorsque les relations $(R1)$ et $(R2)$ sont seulement satisfaites de manière approchée, et construisons les générateurs $Y_{1,p},\, Y_{2,p},\, Y_{3,p} \in \mathrm{End}(\mathscr{H}_p)$ apparaissant dans (5.2.2) pour tout $p \in \mathbb{N}$ à partir des vecteurs propres ainsi construits.

Comme déjà mentionnée ci-dessus, les fonctions coordonnées restreintes à la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ s'identifient aux composantes de l'application moment de S^2 vue comme une orbite coadjointe dans $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$ au sens de la Proposition 1.4.5. D'après le Théorème 1.4.6 de Borel-Weil, la quantification de Kostant-Souriau de la Définition 1.4.3 restreinte à ces fonctions coordonnées induit la représentation irréductible de plus haut poids $p \in \mathbb{N}$. D'autre part, nous montrons dans [H] en utilisant des techniques de quantification par déformation que toute quantification géométrique de la sphère S^2 au sens de la Définition 5.1.1 est semi-classiquement équivalente à travers (5.1.2) à une quantification géométrique satisfaisant les relations $(R1)$ et $(R2)$. Le Théorème 5.2.2 montre ainsi que toute quantification géométrique est semi-classiquement équivalente à la quantification de Kostant-Souriau lorsqu'elle est restreinte aux fonctions coordonnées de $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. En utilisant des propriétés fines des *harmoniques sphériques*, nous montrons ensuite que cela implique l'équivalence semi-classique pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, établissant ainsi le résultat suivant.

Théorème 5.2.3. *[E, Cor. 1.9] La Conjecture 5.2.1 est vraie pour* $X = S^2$ *munie de sa forme volume usuelle.*

Dans le même article [E], nous considérons ensuite le cas du tore $X = \mathbb{T}^2$ muni de sa forme volume usuelle, et montrons de même que la Conjecture 5.2.1 se réduit dans ce cas au résultat algébrique analogue au Théorème 5.2.2 pour les représentations du *tore quantique* de Hannay-Berry [52] et Rieffel [82]. Le tore quantique est défini comme l'*algèbre stellaire* $A_\hbar$ dépendant d'un paramètre $\hbar \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ engendrée par deux éléments $W_1, W_2 \in A_\hbar$ avec relations

$$W_1^* W_1 = W_2^* W_2 = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad W_1 W_2 = e^{2\pi i \hbar} W_2 W_1 \,. \tag{5.2.3}$$

Une *représentation stellaire* $\rho_\hbar : A_\hbar \to \mathrm{End}(\mathscr{H})$ sur un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ est alors déterminé par les données de deux opérateurs unitaires $X_1 := \rho_\hbar(W_1)$, $X_2 := \rho_\hbar(W_2) \in \mathrm{End}(H)$ satisfaisant $X_1 X_2 = e^{2\pi i \hbar} X_2 X_1$. Le Conjecture 5.2.1 se réduit alors au résultat suivant, que nous établissons dans [E].

Théorème 5.2.4. *[H, Th. 1.5] Soit $\{\mathscr{H}_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'espace hermitiens satisfaisant $\dim \mathscr{H}_p = p + O(1)$ lorsque $p \to +\infty$, et supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ et une suite $\{X_{1,p},\, X_{2,p} \in U(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ de paires d'opérateurs unitaires telle que les estimées suivantes valent au sens de la norme d'opérateurs lorsque $p \to +\infty$,*

(R1) $X_{1,p} X_{2,p} = e^{2i\pi/(p+c)} X_{2,p} X_{1,p} + O(p^{-3})\,;$

(R2) $X_{j,p} X_{j,p}^* = \mathrm{Id}_{\mathscr{H}_p} + O(p^{-3})\,,$ *pour tout* $j = 1,\, 2\,.$

Alors on a nécessairement $c \in \mathbb{Z}$ et $\dim \mathscr{H}_p = p + c$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand.

De plus, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, il existe une représentation stellaire irréductible $\rho_\hbar : A_\hbar \to$ End$(\mathscr{H}_p)$ avec $\hbar = (p+c)^{-1}$ telle que l'estimée suivante vaut au sens de la norme d'opérateurs lorsque $p \to +\infty$,

$$X_{j,p} = \rho_\hbar(W_j) + O(p^{-3/2})\,, \text{ pour tout } j = 1,\, 2\,. \tag{5.2.4}$$

La démonstration du Théorème 5.2.4 repose sur la description explicite du spectre et des vecteurs propres des représentations irréductibles du tore quantique donnée dans [52], et nous montrons comme pour le Théorème 5.2.2 que cette construction s'étend lorsque les relations $(R1)$ et $(R2)$ ne sont satisfaites que de manière approchée. Nous montrons de même dans [H] que toute quantification géométrique du tore $\mathbb{T}^2$ est semi-classiquement équivalente à une quantification géométrique satisfaisant les relations $(R1)$ et $(R2)$ lorsqu'elle est restreinte aux deux *exponentielles imaginaires* $e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_1},\, e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_2} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{C})$, avec coordonnées $\theta_1,\, \theta_2 \in S^1$ sur le tore, et le Théorème 5.2.2 montre alors que toute les quantifications géométriques sont semi-classiquement équivalentes sous cette restriction. En utilisant des propriétés usuelles de décroissance exponentielle de la série de Fourier des fonctions lisses sur le tore, nous montrons ensuite que cela implique l'équivalence semi-classique pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$, établissant ainsi le résultat suivant.

Théorème 5.2.5. *[E, Cor. 1.9] La Conjecture 5.2.1 est vraie pour $X = \mathbb{T}^2$ munie de sa forme volume usuelle.*

Notons que contrairement au cas de la sphère S^2, il n'est pas vrai que la quantification de Kostant-Souriau restreinte aux exponentielles imaginaires sur le tore $\mathbb{T}^2$ coïncide avec une représentation (5.2.3) du tore quantique. La quantification géométrique naturelle satisfaisant cette propriété est la *quantification de Weyl* du tore $\mathbb{T}^2$, introduite et étudiée par Hannay et Berry dans [52]. Comme expliqué par Gelca et Uribe dans [44], on peut montrer que la quantification de Weyl est l'unique quantification géométrique $\{Q_p : \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$Q_p(e^{-\frac{\Delta}{4\pi}} f) = T_p(f)\,, \tag{5.2.5}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$, où $\{T_p : \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)\}_{p\in\mathbb{N}}$ est la quantification de Berezin-Toeplitz au sens de la Définition 1.1.3 associée à la structure complexe usuelle du tore carré. Les opérateurs bi-différentiels $\{C_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ dans son développement asymptotique $(P3)$ de la Définition 5.1.1 sont donnés par la célèbre *formule de Moyal-Weyl* pour la quantification par déformation canonique de $\mathbb{R}^2$. À l'instar de la quantification de Kostant-Souriau métaplectique, son imprécision (5.1.6) s'annule, ce qui fournit une autre indication du fait que la correction métaplectique n'est qu'une correction à l'ordre 2 lorsque $p \to +\infty$.

Chapitre 6

Quantification des systèmes intégrables et états isotropes

Historiquement, le premier procédé systématique de quantification, appelé *quantification de Bohr-Sommerfeld*, ne s'appliquait qu'aux *systèmes intégrables*, qui consistent en la donnée de n observables indépendantes sur l'espace des phases classique (X, ω) dont les crochets de Poisson s'annulent deux à deux, pour lesquels la dynamique classique est complètement décrite par des *coordonnées actions-angles*. Dans ce contexte, les états quantiques de (X, ω) sont représentés par les surfaces de niveau communes aux n observables pour lesquelles la coordonnée action est *entière*. Du point de vue moderne sur la quantification, ces états quantiques correspondent aux vecteurs propres communs à la quantification de ces observables, de valeur propre commune donnée par leur la valeur communes sur les surfaces de niveaux correspondantes.

Dans la Section 6.1, je montre en particulier comment associer de manière naturelle un état quantique en quantification holomorphe à chaque sous-variété $\Lambda \subset X$ satisfaisant une condition dite de *Bohr-Sommerfeld*, caractérisant la condition d'intégrabilité de la coordonnée action dans le cas des systèmes intégrables. Je présente ensuite mes résultats dans [F], où je montre comment cet état se localise autour de $\Lambda \subset X$ et où je calcule le produit hermitien de deux tels états en fonction de l'intersection des sous-variétés correspondantes à la limite semi-classique lorsque $p \to +\infty$.

Dans la Section 6.2, je présente une application de ces travaux à la non-annulation des *séries de Poincaré relatives* en théorie des formes automorphes, qui s'identifient aux états quantiques associés à des géodésiques fermées sur un espace localement symétrique hermitien.

Dans la Section 6.3, je présente une autre application de ces travaux aux systèmes intégrables de *Gelfand-Zetlin*, introduits par Guillemin et Sternberg dans [49] sur les orbites coadjointes du groupe unitaire $U(n)$, dont la quantification holomorphe coïncide avec les représentations irréductibles de $U(n)$ par le Théorème 1.4.6 de Borel-Weil. Je décris en particulier mes résultats dans [L], où je montre comment calculer les asymptotiques des éléments de matrices de $U(n)$ dans les bases dites de *Gelfand-Zetlin* de ces représentations lorsque le plus haut poids tends vers l'infini.

6.1 Quantification des sous-variétés isotropes

Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$, préquantifiée par (L, h^L, ∇^L). La notion suivante joue un rôle fondamental en mécanique classique.

Définition 6.1.1. Un *système intégrable* sur (X, ω) est une application lisse

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) \,, \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

submersive sur un ouvert dense $U \subset X$, et dont les composantes satisfont

$$\{f_j,\, f_k\} = 0 \,, \text{ pour tous } 1 \leqslant j,\, k \leqslant n \,. \tag{6.1.2}$$

L'existence d'un système intégrable $F : X \to \mathbb{R}^n$ sur une variété symplectique (X, ω) permet une description précise des dynamiques hamiltoniennes engendrées par ses n composantes, vues comme des observables classiques. En particulier, on a le célèbre *théorème d'Arnold-Liouville* suivant.

Proposition 6.1.2. *[4, Chap.10, § 50] Pour tout système intégrable $F : X \to \mathbb{R}^n$, il existe une action hamiltonienne libre du tore $\mathbb{T}^n$ de dimension n sur l'ouvert $U \subset X$ de ses points réguliers, ainsi qu'un difféomorphisme $\Psi : F(U) \xrightarrow{\sim} \Delta \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'application moment associée soit donnée par*

$$M := \Psi \circ F : U \longrightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^n \,. \tag{6.1.3}$$

En supposant que les fibres de $F : X \to \mathbb{R}^n$ sont connexes, l'action hamiltonienne libre du tore $\mathbb{T}^n$ sur $U \subset X$ induit un difféomorphisme $U \simeq \mathbb{T}^n \times \Delta$ pour lequel l'application (6.1.3) coïncide avec la seconde projection. Cette application est aussi appelée *coordonnées actions-angles*, la coordonnée angle étant paramétrée par $\mathbb{T}^n$ tandis que la coordonnée action est paramétrée par Δ.

Supposons maintenant que l'action de $\mathbb{T}^n$ se relève au fibré préquantifiant (L, h^L, ∇^L) au-dessus de $U \subset X$, auquel cas on peut choisir l'application moment (6.1.3) satisfaisant la formule de Kostant de la Définition 1.4.4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, une fibre de cette application au dessus d'un multiple entier

$$b \in \Delta \cap p^{-1}\mathbb{Z}^n \tag{6.1.4}$$

de $\hbar \sim (2\pi p)^{-1}$ est dite satisfaire la *condition de Bohr-Sommerfeld* au niveau $p \in \mathbb{N}$. Comme expliqué en début de chapitre, une telle fibre représente un état quantique pour le procédé de quantification de Bohr-Sommerfeld de (X, ω). D'autre part, les fibres $\Lambda \subset X$ de l'application (6.1.3) sont *lagrangiennes*, de sorte que $\dim \Lambda = n$ et $\omega|_\Lambda \equiv 0$. La condition de préquantification (1.1.4) implique donc que la connexion ∇^L est plate au-dessus de Λ, et on montre facilement d'après la Définition 1.4.4 que l'application moment (6.1.3) calcule l'holonomie de ∇^L autour de chaque direction de $\mathbb{T}^n \simeq \Lambda$. La condition de Bohr-Sommerfeld énoncée ci-dessus se ramène ainsi à la notion plus générale suivante.

Définition 6.1.3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, une immersion $\iota : \Lambda \to X$ d'une variété compacte Λ dans X satisfait la *condition de Bohr-Sommerfeld* au niveau $p \in \mathbb{N}$ s'il existe une section non-nulle $\zeta^p \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^* L^p)$ telle que

$$\nabla^{\iota^* L^p} \zeta^p = 0\,, \tag{6.1.5}$$

où $\nabla^{\iota^* L^p}$ est la connexion sur $\iota^* L^p$ induite par ∇^L.

Une conséquence immédiate de la définition est que $\iota^*\omega = 0$, c'est à dire que l'immersion est *isotrope*. Ainsi, la connexion induite par ∇^L sur $\iota^* L$ est plate par (1.1.4), et la condition de Bohr-Sommerfeld au niveau $p \in \mathbb{N}$ est alors équivalente à ce que le fibré avec connexion $(\iota^* L^p, \nabla^{\iota^* L^p})$ au-dessus de Λ soit non seulement plat, mais aussi trivial. On verra dans la Section 6.2 pourquoi il est utile de considérer des immersions plutôt que des plongements.

Considérons maintenant la quantification presque holomorphe de la Définition 2.2.3 associée à une structure presque complexe compatible $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$. En utilisant le noyau de Bergman de la Définition 1.2.1, on définit alors la quantification d'une immersion isotrope satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld de la façon suivante.

Définition 6.1.4. L'*état isotrope* associé à une immersion propre $\iota : \Lambda \to X$ satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld au niveau $p \in \mathbb{N}$ est la section $s_{\Lambda,p} \in \mathscr{H}_p$ définie pour tout $x \in X$ par

$$s_{\Lambda,p}(x) = \int_\Lambda P_p(x, \iota(y)).\zeta^p(y) dv_\Lambda(y)\,, \tag{6.1.6}$$

où dv_Λ est la forme volume riemannienne sur Λ induite par g^{TX} et où $\zeta^p \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^* L^p)$ satisfait (6.1.5).

Dans le cas où $\iota : \Lambda \to X$ est de plus *lagrangienne*, de sorte que $\dim \Lambda = n$, on parle alors d'*état lagrangien*. Dans le cas où (X, ω) est une *variété torique*, donc toute entière munie d'une action hamiltonienne effective du tore $\mathbb{T}^n$ qui se relève à (L, h^L, ∇^L), l'application moment associée

$$\mu : X \to \Delta \subset \mathbb{R}^n \tag{6.1.7}$$

où $\Delta := \mathrm{Im}\,\mu$ est son *polytope de Delzant*, forme alors un système intégrable au sens de la Définition 6.1.1 s'identifiant avec les coordonnées actions-angles (6.1.3) correspondantes au-dessus de l'intérieur $\Delta^0 \subset \Delta$. Une variété torique (X, ω) peut toujours être munie d'une structure complexe compatible préservée par l'action de $\mathbb{T}^n$, et on montre alors facilement que les états isotropes associés aux fibres de (6.1.7) satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld au niveau p forment alors une base orthogonale de $\mathscr{H}_p$.

Dans [F], j'applique le Théorème 1.2.5 à l'étude des propriétés semi-classiques de ces états isotropes dans le cadre de la quantification presque holomorphe de la Section 2.2, obtenant le résultat suivant.

Théorème 6.1.5. *[F, Th. 1.1] Soit $\iota : \Lambda \to X$ une immersion propre satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld à tout niveau $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand. Alors il existe une suite $\{a_r \in \mathbb{R}\}_{r \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et lorsque $p \to +\infty$, on a*

$$p^{\frac{\dim \Lambda}{2} - n} \|s_{\Lambda,p}\|_p^2 = \sum_{r=0}^{k-1} p^{-r} a_r + O(p^{-k})\,, \tag{6.1.8}$$

avec $a_0 = 2^{\frac{\dim \Lambda}{2}} \operatorname{Vol}(\Lambda)$.

Je traite aussi dans [F] le cas de la quantification d'un fibré vectoriel (E, ∇^E, h^E), ainsi que les cas des variétés orbifoldes et non-compact. Ce résultat étend un résultat de Borthwick, Paul et Uribe [17, Th. 3.2], qui traitent le cas de (X, ω, J) Kählerienne compacte avec $E = \mathbb{C}$ et Λ lagrangien. Remarquons que la fibre d'un système intégrable $F : X \to \mathbb{R}^n$ est seulement isotrope en général, le cas lagrangien correspondant au fibres régulières. Dans le cas d'une variété torique par exemple, les fibres de (6.1.7) au-dessus d'une face ouverte $\sigma \subset \Delta$ sont des sous-variétés isotropes de dimension $\dim \sigma \leqslant n$.

Soient maintenant $\iota_j : \Lambda_j \hookrightarrow X$ avec $j = 1, 2$ deux immersion propres s'intersectant proprement, satisfaisant la condition de Bohr-Sommerfeld à tout niveau $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand. Considérons la métrique hermitienne $h^{TX} := g^{TX} + \sqrt{-1}\omega$ sur (TX, J). J'établis en général l'asymptotique suivante, où on suppose que l'intersection est connexe pour simplifier.

Théorème 6.1.6. *[F, Th. 1.2] Si* $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$*, alors pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, il existe* $C_k > 0$ *tel que pour tous* $p \in \mathbb{N}$*, on a*

$$|\langle s_{\Lambda_1,p}, s_{\Lambda_2,p} \rangle_p| < C_k \, p^{-k} \,. \tag{6.1.9}$$

Si $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$*, et en posant* $d = \dim \Lambda_1 + \dim \Lambda_2 - \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2$*, alors il existe une suite* $\{c_r \in \mathbb{C}\}_{r \in \mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et lorsque* $p \to +\infty$*,*

$$p^{\frac{d}{2}-n} \langle s_{\Lambda_1,p}, s_{\Lambda_2,p} \rangle_p = \lambda^p \sum_{r=0}^{k-1} p^{-r} c_r + O(p^{-k}), \tag{6.1.10}$$

où $\lambda^p \in \mathbb{C}$ *est la valeur de la fonction constante définie par* $\lambda^p(x) = \langle \zeta_1^p(x), \zeta_2^p(x) \rangle_L$*, quelque soit* $x \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$*. De plus, si* $\dim \Lambda_1 = n$*, on a l'estimée suivante lorsque* $p \to +\infty$*,*

$$b_0 = 2^{n/2} \int_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} \det{}^{-\frac{1}{2}} \Big\{ \sqrt{-1} \sum_{q=1}^{n-d} h^{TX}(\nu_i, e_q) \omega(\nu_j, e_q) \Big\}_{i,j=1}^{\dim \Lambda_2 - d} |dv|_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}, \tag{6.1.11}$$

où $\langle e_i \rangle_{i=1}^{n-d}$*,* $\langle \nu_j \rangle_{j=1}^{\dim \Lambda_2 - d}$ *sont des bases orthonormées du fibré normal à* $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ *dans* Λ_1, Λ_2*, et* $|dv|_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2}$ *est la densité riemanniennne sur* $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ *induite par* g^{TX}*.*

Là encore, je traite aussi dans [F] le cas de la quantification d'un fibré vectoriel (E, ∇^E, h^E), ainsi que les cas des variétés orbifoldes et non-compactes. Dans le cas où $E = K_X^{1/2}$ est donné par la correction métaplectique, on peut alors corriger la formule (6.1.11) pour faire en sorte de se débarrasser de la métrique hermitienne h^{TX}, et comme je le montre dans [L, Th. 2.11], on obtient alors une formule purement symplectique dans le cas d'intersections transverses. Notons cependant que le déterminant dans l'intégrande de la formule (6.1.11) est en fait le conjugé du terme correspondant dans [F, Th. 4.2, (4.4)], qui doit être corrigé en conséquence, ainsi que . Le Théorème 6.1.6 étend le résultat de Borthwick, Paul et Uribe dans [17, Th. 3.2], qui traitent le cas particulier de $X, \omega, J)$ variété Kählerienne avec $E = \mathbb{C}$ et $\dim \Lambda_1 = \dim \Lambda_2 = n$, obtenant un développement asymptotique en $p^{-1/2}$ au lieu de p^{-1}. Charles étend de plus dans [25] les résultats de [17] pour une notion plus générale d'état lagrangien, qui sera utilisé dans la Section 6.3.

J'établis les Théorèmes 6.1.5 et 6.1.6 comme une conséquence du Théorème 1.2.5, qui permet en particulier de localiser les calculs dans un voisinage des sous-variétés isotropes. J'utilise ensuite la sections plate $\zeta^p \in \mathscr{C}^\infty(\Lambda, \iota^* L^p)$ donnée par la condition de Bohr-Sommerfeld pour ramener le calcul de l'état isotrope (6.1.6) à l'intégrale du modèle local (1.2.12) le long de $\Lambda \subset X$ dans la trivialisation de (L, h^L, ∇^L) par transport parallèle dans des cartes adaptées.

6.2 Séries de Poincaré relatives

Dans [17], Borthwick, Paul et Uribe appliquent leur étude des propriétés semi-classiques des lagrangiens de Bohr-Sommerfeld afin de démontrer la non-annulation de certaines *séries de Poincaré relatives* associées à des géodésique fermées sur des surfaces de Riemann hyperboliques compactes.

Dans ce contexte, on considère $X = \mathbb{H}/\Gamma$, où $\mathbb{H}$ est le plan hyperbolique et où $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe discret de son groupe d'isométrie pour la *métrique hyperbolique* g^{TX}, qui définit une métrique de Kähler préquantifiée (1.1.5) par le fibré en droites canonique $L = K_X$, et qui satisfait l'équation de Kähler-Einstein (4.2.15). Un élément *hyperbolique* $g_0 \in \Gamma$, c'est à dire satisfaisant $\mathrm{Tr}[g_0] > 0$, engendre une *géodésique fermée* de X, c'est à dire qu'il existe une géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ satisfaisant $g_0.\gamma(t) = \gamma(t+1)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors le résultat élémentaire suivant, comme énoncé dans [F, Cor. 6.2].

Lemme 6.2.1. *Si $\gamma : S^1 \to X$ est une géodésique fermée de $X = \mathbb{H}/\Gamma$ munie de la métrique hyperbolique g^{TX}, alors elle satisfait la condition de Bohr-Sommerfeld à tout niveau $p \in \mathbb{N}$.*

On est donc précisément dans la situation décrite en Section 6.1, avec X éventuellement orbifolde et non-compacte. Les Théorèmes 6.1.5 et 6.1.6 se traduisent alors en l'énoncé suivant, où on adopte la convention que $\sqrt{-a} := \sqrt{-1}\sqrt{a}$ si $a > 0$.

Théorème 6.2.2. *[F, Th. 6.4] Soit $X = \mathbb{H}/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, soit $\gamma : S^1 \to X$ une géodésique fermée, et soit $\{s_{\gamma,p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ un état lagrangien associé comme en Définition 6.1.4. Alors*

$$\|s_{\gamma,p}\|^2_{L^2} = \left(\frac{p}{\pi}\right)^{1/2} \mathrm{Vol}(\gamma) + O(p^{-1/2}). \tag{6.2.1}$$

De plus, si $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to X$ sont deux géodésiques fermées s'intersectant proprement en dehors d'un voisinage du lieu singulier, alors on a

$$\langle s_{\gamma_1,p}, s_{\gamma_2,p}\rangle = \sqrt{2} \sum_{z\in\gamma_1\cap\gamma_2} \sum_{\substack{\theta_1,\theta_2\in S^1,\\ \gamma_1(\theta_1)=\gamma_2(\theta_2)=z}} \langle s_1(\theta_1), s_2(\theta_2)\rangle^p_{K_X} \frac{e^{-\sqrt{-1}\left(\frac{\eta(z)}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\sin(\theta_z)}} + O(p^{-1}), \tag{6.2.2}$$

où $\eta(z) \in [0, 2\pi[$ est l'angle orienté entre γ_1 et γ_2 en $z \in \gamma_1 \cap \gamma_2$.

Ce résultat étend le résultat de Borthwick, Paul et Uribe dans [17, Th. 4.4], qui traitent le cas où $X = \mathbb{H}/\Gamma$ est compact et lisse. Notons la différence de signe dans (6.2.2) avec [F, Th. 6.3, (6.9)], qui doit être corrigé en conséquence.

À travers l'identification des sections de K_X au-dessus de X avec des fonctions Γ-équivariantes sur $\mathbb{H}$, on peut alors utiliser la forme explicite du noyau de Bergman du plan hyperbolique pour calculer explicitement les états isotropes associés à partir de la Définition 6.1.4. Grâce à un calcul de Katok dans [58, (1.3)], j'obtiens alors le résultat suivant comme conséquence du Théorème 6.1.5 au cas non-compact et orbifold.

Théorème 6.2.3. *[F, Th. 6.7] Soit $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe discret et $g_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ satisfaisant $\mathrm{Tr}[g_0] > 2$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, la série convergente*

$$\sum_{[g] \in \langle g_0 \rangle \backslash \Gamma} (cz+d)^{-2p} \Big(c(g.z)^2 + (d-a)(g.z) - b \Big)^p \ , \tag{6.2.3}$$

ne s'annule pas identiquement en $z \in \mathbb{H}$.

Ce résultat étend les résultats de Borthwick, Paul et Uribe dans [17, § 4], qui ne traitent que le cas Γ cocompact et lisse. Ces séries sont des exemples de *séries de Poincaré relatives*, un outil classique pour la construction de *formes automorphes*. Les séries de Poincaré relatives ont été utilisées par Katok [58] dans le cadre de la théorie des formes automorphes, montrant en particulier que ces séries engendrent l'espace des *formes paraboliques* de niveau $2p \in \mathbb{N}$.

Avec Lu, Ma et Marinescu, nous étudions de plus le cas des géodésiques fermée sur un espace localement symmetrique Hermitian X général. On peut encore appliquer le Théorème 6.1.5 aux états isotropes associés à des géodésiques fermés comme précédemment, en notant que ces immersions ne sont plus lagrangiennes et donc que ce cadre dépasse le cadre considéré par Borthwick, Paul et Uribe dans [17]. Considérons par exemple $X = B_n/\Gamma$, où $B_n \subset \mathbb{C}^n$ est la boule unité ouverte et $\Gamma \subset \mathrm{SU}(n,1)$ est un sous-groupe discret, agissant sur B^n identifié avec l'hémisphère sud de $\mathbb{CP}^n$. Alors les géodésiques fermées $\gamma : S^1 \to X$ sont engendrées par les éléments *loxodromiques* $g_0 \in \Gamma$. En utilisant les calculs de Foth et Katok dans [43, § 6.3], nous établissons le résultat suivant.

Théorème 6.2.4. *Soit un élément loxodromique $g_0 = \begin{pmatrix} A & b \\ c^T & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, avec $A \in M_n(\mathbb{C})$, $b,\, c \in \mathbb{C}^n$ et $d \in \mathbb{C}$, soit $\gamma : \mathbb{R} \to B_n$ la géodésique engendrée par g_0, et soient $x,\, y \in \partial B_n$ les deux points sur le bord de B_n joints par γ. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, la série convergente*

$$\sum_{[g] \in \langle g_0 \rangle \backslash \Gamma} (c.z+d)^{-2(n+1)p} (\langle g.z, x\rangle \langle g.z, y\rangle)^{-(n+1)p} \ , \tag{6.2.4}$$

ne s'annule pas identiquement en $z \in B_n$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^n$ et $c.z := \sum_{j=1}^n c_j z_j$.

L'analogue du Théorème 6.2.4 pour des séries de Poincaré relatives associées à des lagrangiens remarquables $\Lambda \subset B_n$ a été établi par Foth dans [42] en utilisant les résultats de Borthwick, Paul et Uribe dans [17].

6.3 Quantification des systèmes intégrables

Soit (X, ω) une variété symplectique préquantifiée par (L, h^L, ∇^L), et considérons la quantification presque holomorphe de la Définition 2.2.3 associée à une structure presque complexe compatible $J \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathrm{End}(TX))$. Le pendant quantique d'un système intégrable classique est fourni par la notion suivante.

Définition 6.3.1. Un *système intégrable quantique* sur l'espace d'états quantiques $\mathscr{H}_p$ avec $p \in \mathbb{N}$ est la donnée d'endomorphismes hermitiens $Q_{j,p} \in \mathrm{Herm}(\mathscr{H}_p)$ pour tous $1 \leqslant j \leqslant n$ satisfaisant

$$[Q_{j,p},\, Q_{k,p}] = 0 \quad \text{pour tous} \quad 1 \leqslant j,\, k \leqslant n\,, \tag{6.3.1}$$

et dont les espaces propres communs sont de multiplicité 1.

La propriété de commutation (6.3.1) doit bien sûr être rapportée à la condition de commutation classique (6.1.1), et dans le contexte d'un procédé de quantification, une question naturelle est de se demander quand est-ce qu'une quantification appropriée d'un système intégrable classique produit un système intégrable quantique. Le fait que les espaces propres communs à (6.3.1) soient de multiplicité 1 permet d'associer un état quantique à chaque valeur propre commune, et il est alors naturel de se demander si ces états quantiques s'identifient aux états isotropes associés au fibres de (6.1.3) au-dessus des multiples entiers (6.1.4) de $\hbar \sim (2\pi p)^{-1}$ dans $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, de valeurs propres communes correspondantes.

Comme déjà mentionné en Section 6.1, l'exemple le plus classique d'un système intégrable sur une variété compacte préquantifiée est le cas où (X, ω) est *torique*, auquel cas la quantification hérite alors d'une action unitaire de $\mathbb{T}^n$. Un résultat classique de géométrie torique, suivant par exemple [47, p. 142], énonce que pour tout $p \in \mathbb{N}$ suffisament grand, on a

$$\#\,(\Delta\, \cap p^{-1}\mathbb{Z}^n) = \dim \mathscr{H}_p\,. \tag{6.3.2}$$

Comme expliqué dans la Section 1.4, les générateurs de l'action du tore sont donnés par la quantification de Kostant-Souriau (1.4.7) des composantes de l'application moment (6.1.7), et ceux-ci forment bien un système intégrable quantique au sens de la Définition 6.3.1, avec valeurs propres communes données par $\Delta \cap p^{-1}\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. La correspondance entre la quantification de Bohr-Sommerfeld d'un système intégrable classique et le système intégrable quantique correspondant est donc ici exacte, même pour les points singuliers de l'application moment (6.1.7) appartenant au bord de $\Delta \subset \mathbb{R}^n$.

Dans [L], je considère le cas particulier de l'espace projectif complexe $X = \mathbb{CP}^n$, qui s'identifie à une orbite coadjointe du groupe spécial unitaire $SU(n+1)$ au sens de la Proposition 1.4.5, et qui admet une structure de variété torique pour l'action du tore maximal $\mathbb{T}^n \subset SU(n+1)$. Le Théorème 1.4.6 vaut alors pour la représentation irréductible de $SU(n+1)$ de plus haut poids $(p, 0, \cdots 0) \in \mathbb{Z}^n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\{e_\nu\}_{\nu \in \Delta \cap p^{-1}\mathbb{Z}^n}$ la base de vecteurs propres communs pour l'action du tore $\mathbb{T}^n$ sur $\mathscr{H}_p$ paramétrée par les valeurs propres communes (6.1.4) d'après (6.3.2). Soient maintenant $(v_p,\, w_p \in \Delta \cap p^{-1}\mathbb{Z}^n)_{p \in \mathbb{N}}$ deux suites appartenant à la même face du polytope de Delzant Δ à partir d'un certain rang et convergeant respectivement vers $v, w \in \Delta$. Pour tout $g \in U(n)$ tel que l'intersection $g\mu^{-1}(v) \cap \mu^{-1}(w)$ soit propre, on note $g\Lambda_v \cap \Lambda_w = \cup_{q=0}^m Y^{(q)}$ sa décomposition en composantes connexes, On note $\eta_p^{(q)} \in \mathbb{R}$ l'aire symplectique d'un disque dont le bord est donné par un chemin dans $g\mu^{-1}(v_p)$ allant de n'importe quel point $x_p \in g\mu^{-1}(v_p) \cap \mu^{-1}(w_p)$ approchant $Y^{(0)}$ lorsque $p \to +\infty$ à n'importe quel point $y_p \in g\mu^{-1}(v_p) \cap \mu^{-1}(w_p)$ approchant $Y^{(q)}$ lorsque $p \to +\infty$ suivi d'un chemin dans $\mu^{-1}(v_p)$ retournant à $x_p \in g\mu^{-1}(v_p) \cap \mu^{-1}(w_p)$. J'obtiens alors le résultat suivant comme une application directe du Théorème 6.1.6.

Théorème 6.3.2. *[L, Th. 1.2] Pour tout $g \in U(n)$ tel que $g\mu^{-1}(v) \cap \mu^{-1}(w) = \emptyset$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left|\langle g e_{v_p}, e_{w_p} \rangle\right| \leqslant C_k \, p^{-k} \,. \tag{6.3.3}$$

Pour tout $g \in U(n)$ tel que l'intersection $g\mu^{-1}(v) \cap \mu^{-1}(w)$ est propre, il existe $\kappa_q \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ainsi que des scalaires $z_p \in \mathbb{C}^*$ avec $|z_p| = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, tels qu'on a le développement asymptotique suivant lorsque $p \to +\infty$,

$$\langle g e_{pv_p}, e_{pw_p} \rangle = z_p \, p^{-\frac{d}{4}} \sum_{q=1}^m p^{\frac{\dim Y_q}{2}} \sqrt{-1}^{\kappa_q} e^{2\pi\sqrt{-1} p \eta_p^{(q)}} \left(b_p^{(q)} + O(p^{-1}) \right) \,, \tag{6.3.4}$$

avec $b_p^{(q)} \to b^{(q)}$ lorsque $p \to +\infty$ donné par la formule (6.1.11) *pour tout $0 \leqslant q \leqslant m$ et où $d = \dim \mu^{-1}(v) + \dim \mu^{-1}(w)$.*

Dans le cas $n = 1$, les éléments de la base de vecteurs propres communs pour l'action du cercle S^1 sur $\mathscr{H}_p$ coïncident avec les *états de spin $\frac{p}{2}$* usuels en mécanique quantique, et les éléments de matrice calculés dans Théorème 6.3.2 coïncident alors avec les *éléments de la d-matrice de Wigner*. Comme expliqué en Section 5.2, l'orbite coadjointe associée s'identifie naturellement à la sphère S^2 munie de sa forme volume usuelle, et on retrouve alors avec le Théorème 6.3.2 la *formule d'aire sphérique* semi-classique pour les éléments de la d-matrice de Wigner.

Un autre exemple classique est fourni par les variétés coadjointes régulières (X_λ, ω) du groupe unitaire $U(n)$, qui admettent un système intégrable naturel

$$H : X_\lambda \longrightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \,, \tag{6.3.5}$$

introduit par Guillemin et Sternberg dans [50], appelé *système de Gelfand-Zetlin*. Ils montrent en particulier que ce système intégrable admet des coordonnées actions-angles (6.1.3) données par une application continue

$$M : X_\lambda \longrightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \,, \tag{6.3.6}$$

lisse au-dessus de l'ouvert dense $M^{-1}(\Delta^0) \subset X_\lambda$, et dont l'image $\Delta := \mathrm{Im}(M)$ est un polytope convexe, appelé *polytope de Gelfand-Zetlin*, défini par

$$\Delta_\lambda = \{ (\nu_j^{(k)})_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \;\Big|\; \lambda_j \geqslant \nu_j^{(n-1)} \geqslant \lambda_{j+1} \,,\, \nu_j^{(k)} \geqslant \nu_j^{(k-1)} \geqslant \nu_{j+1}^{(k)} \} \,. \tag{6.3.7}$$

Pour décrire le système intégrable quantique associé, rappelons qu'un poids entier $\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{u}(n)^*$ s'identifie avec $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ satisfaisant $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$. Considérons d'autre part la suite d'inclusions supérieures gauches

$$U(1) \subset U(2) \subset \cdots \subset U(n) \tag{6.3.8}$$

des groupes unitaires. Un résultat classique de Weyl dit que toute représentation irréductible V de $U(n)$ admet une décomposition unique en représentations irréductibles distinctes V_j de $U(n-1) \subset U(n)$ par restriction, de sorte que chaque représentation irréductible de $U(n-1)$ apparaît avec multiplicité au plus 1 dans cette décomposition. Par itération descendante le long du séquence d'inclusions (6.3.8), on obtient ainsi une décomposition canonique

$$V = \bigoplus_{\nu \in \Gamma} \mathbb{C}_\nu \,, \tag{6.3.9}$$

où chaque composante $\mathbb{C}_\nu \subset V$ est de dimension complexe 1 comme représentation irréductible de $U(1) \subset U(n)$. Une base $\{e_\nu\}_{\nu \in \Gamma}$ de V compatible avec la décomposition (6.3.9) est appelé *base de Gelfand-Zetlin*. En utilisant sa description explicite dûe à Weyl, Guillemin et Sternberg montrent alors dans [50, § 6] que les composantes de la décomposition de Gelfand-Zetlin (6.3.9) sont naturellement paramétrés par les points entiers

$$\frac{1}{p}\Gamma_p := \Delta_\lambda \cap p^{-1}\mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{6.3.10}$$

à l'intérieur du polytope Gelfand-Zetlin (6.3.7).

Considérons maintenant la paramétrisation de Harish-Chandra des représentations irréductibles de $U(n)$ avec $\rho := (n-1, n-2, \cdots, 1, 0) \in \mathbb{Z}^n$. Le Théorème 1.4.6 de Borel-Weil énonçe que la quantification holomorphes $\mathscr{H}_p^{K_X^{1/2}}$ de $(X_\lambda, p\,\omega)$ s'identifie avec la représentation irréductible de $U(n)$ de plus haut poids $p\lambda + \rho \in \mathbb{Z}^n$. Rappelons que pour tout $v \in \Delta_\lambda^0$, la fibre

$$\Lambda_v := M^{-1}(v) \subset X \tag{6.3.11}$$

est un tore lagrangien à l'intérieur de (X, ω). Pour chaque $1 \leqslant j \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$, on note $M_j \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ pour la $j^{\text{ième}}$ composante de l'application (6.3.6) dans $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$, et on définit l'aire symplectique $\eta(x) \in \mathbb{R}$ comme avant le Théorème 6.3.2. Mon résultat principal dans [L, Th. 1.1] est alors le suivant.

Théorème 6.3.3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $\{e_\nu\}_{\nu \in \Gamma_{p\lambda+\rho}}$ une base Gelfand-Zetlin de la représentation irréductible de $U(n)$ de plus haut poids $p\lambda + \rho$.*

Alors pour tout $g \in U(n)$ tel que $g\Lambda_v \cap \Lambda_w = \emptyset$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|\langle g e_{pv_p}, e_{pw_p} \rangle\right| \leqslant C_k\, p^{-k} \,. \tag{6.3.12}$$

De plus, pour tout $g \in U(n)$ tel que l'intersection $g\Lambda_v \cap \Lambda_w$ est transverse, on a des scalaires $z_p \in \mathbb{C}^*$ avec $|z_p| = 1$ tels qu'on a le développement asymptotique suivant lorsque $p \to +\infty$,

$$p^{\frac{n(n-1)}{4}} \langle g e_{pv_p}, e_{pw_p} \rangle = z_p \sum_{x \in g\Lambda_{v_p} \cap \Lambda_{w_p}} \frac{\sqrt{-1}^{\kappa(x)} e^{2\pi\sqrt{-1}p\eta(x)}}{\left|\det\left(\{g_* M_j, M_k\}(x)\right)_{j,k}\right|^{\frac{1}{2}}} + O(p^{-1}) \,, \tag{6.3.13}$$

avec $\kappa(x_p) \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *constant après un certain rang pour tout* $(x_p \in g\Lambda_{v_p} \cap \Lambda_{w_p})_{p\in\mathbb{N}}$ *qui converge.*

La démonstration du Théorème 6.3.3 est basée sur le fait que la décomposition de Gelfand-Zetlin (6.3.9) coïncide avec la décomposition en espaces propres communs de la *sous-algèbre de Gelfand-Zetlin*

$$\mathscr{A}_n := \langle Z[U(\mathfrak{u}(k))] \mid 1 \leqslant k \leqslant n\rangle \subset U(\mathfrak{u}(n))\,, \tag{6.3.14}$$

qui est la sous-algèbre commutative de l'*algèbre enveloppante universelle* $U(\mathfrak{u}(n))$ de $\mathfrak{u}(n)$ engendrée par les centres $Z[U(\mathfrak{u}(k))] \subset U(\mathfrak{u}(k))$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{u}(k)$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant n$ via la suite d'inclusions (6.3.8). En utilisant les résultats fondamentaux de la Section 1.4, et en particulier la (1.4.5), je montre que pour des familles génératrices naturelles $Q_j^{(k)} \in Z[U(\mathfrak{u}(k))]$ paramétrées par $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, leur action sur la représentation irréductible $\mathscr{H}_p^{K_X^{1/2}}$ de $U(n)$ satisfont l'estimée suivante lorsque $p \to +\infty$,

$$\frac{1}{(2\pi\sqrt{-1}p)^j} Q_j^{(k)} = T_p(H_j^{(k)}) + O(p^{-1})\,, \tag{6.3.15}$$

où les $H_j^{(k)} \in \mathscr{C}^\infty(X,\mathbb{R})$, pour $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, sont les composantes du système de Gelfand-Zetlin (6.3.5) sur (X,ω). Puisque les $Q_j^{(k)} \in Z[U(\mathfrak{u}(k))]$ commutent pour tous $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$, on a bien un système intégrable quantique au sens de la Définition 6.3.1, qui d'après (6.3.15) apparaît comme la quantification du système intégrable de Gelfand-Zetlin (6.3.5). En utilisant cette fois les résultats de Charles dans [25, 26] sur la limite semi-classique de la quantification de Berezin-Toeplitz des systèmes intégrables, cela montre que les bases de Gelfand-Zetlin sont bien des états lagrangiens associés à une fibre de Bohr-Sommerfed régulière du système de Gelfand-Zetlin (6.3.6) au sens de [25], ce qui montre en particulier qu'ils satisfont au Théorème 6.1.6 sur le produit de deux états lagrangiens en fonction de l'intersection des lagrangiens associés, ce qui permet d'établir le Théorème 6.3.3.

Bibliographie

Articles présentés

[A] L. Ioos, *On the composition of Berezin-Toeplitz operators on symplectic manifolds*, Math. Z. **290** (2018), no. 1-2, 539–559.

[B] L. Ioos, W. Lu, X. Ma, G. Marinescu, *Berezin-Toeplitz quantization for eigenstates of the Bochner-Laplacian on symplectic manifolds*, J. Geom. Anal **30** (2020), no. 3, 2615–2646.

[C] L. Ioos, *Geometric quantization of Hamiltonian flows and the Gutzwiller trace formula*, Lett. Math. Phys. **110** (2020), 1585—1621.

[D] L. Ioos, V. Kaminker, L. Polterovich, D. Shmoish, *Spectral aspects of the Berezin transform*, Ann. Henri Lebesgue, **3** (2020), 1343–1387.

[E] L. Ioos, D. Kazhdan, L. Polterovich, *Berezin-Toeplitz quantization and the least unsharpness principle*, Int. Math. Res. Not. IMRN **6** (2021), 4625—4656.

[G] L. Ioos, *Geometric quantization of symplectic maps and Witten's asymptotic conjecture*, Adv. Math. **387** (2021), 107840, 54 pages.

[F] L. Ioos, *Quantization and isotropic submanifolds*, Michigan Math. J. **71** (2022), no. 1, 177–220.

[I] L. Ioos, *Anticanonically balanced metrics over Fano manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **62** (2022), 1–32.

[J] L. Ioos, *Balanced metrics for Kähler-Ricci solitons and quantized Futaki invariants*, J. Funct. Anal. **282** (2022), no. 8, 109400.

[H] L. Ioos, D. Kazhdan, L. Polterovich, *Almost representations of Lie algebras and quantization*, Amer. J. Math. **145** (2023), no. 5, 1587–1629.

[K] L. Ioos, L. Polterovich, *Quantization of symplectic fibrations and canonical metrics*, Internat. J. Math. **34** (2023), no. 8, 47 pp.

[L] L. Ioos, *Asymptotics of unitary matrix elements in canonical bases*, Arxiv e-print (2024), arxiv:2405.06137.

Références

[1] D. N. Akhiezer, *Lie group actions in complex analysis*, Aspects of Mathematics, vol. E27, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1995.

[2] J. E. Andersen, *The Witten-Reshetikhin-Turaev invariants of finite order mapping tori I*, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 1–38.

[3] V. Apostolov and H. Huang, *A splitting theorem for extremal Kähler metrics*, J. Geom. Anal. **25** (2015), no. 1, 149–170.

[4] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1978, Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein.

[5] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523–615.

[6] S. Axelrod, S. Della Pietra, and E. Witten, *Geometric quantization of chern-simons gauge theory*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 3, 787–902.

[7] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization. I. Deformations of symplectic structures*, Ann. Physics **111** (1978), no. 1, 61–110.

[8] F. A. Berezin, *Quantization*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **38** (1974), 1116–1175.

[9] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2004, Corrected reprint of the 1992 original.

[10] R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, and A. Zeriahi, *A variational approach to complex Monge-Ampère equations*, Publ. Sci. IHES **117** (2013), no. 2, 179–245.

[11] R. J. Berman and D. Witt Nyström, *Complex optimal transport and the pluripotential theory of Kähler-Ricci solitons*, Arxiv e-print (2014), arxiv:1401.8264.

[12] J.-M. Bismut and D. S. Freed, *The analysis of elliptic families. I. Metrics and connections on determinant bundles*, Comm. Math. Phys. **106** (1986), no. 1, 159–176.

[13] J.-M. Bismut, H. Gillet, and C. Soulé, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Quillen metrics on holomorphic determinants*, Comm. Math. Phys. **115** (1988), no. 2, 301–351.

[14] J.-M. Bismut and K. Köhler, *Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas*, J. Algebraic Geom. **1** (1992), no. 4, 647–684.

[15] J.-M. Bismut and G. Lebeau, *Complex immersions and Quillen metrics*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1991), no. 74, ii+298 pp. (1992).

[16] M. Bordemann, E. Meinrenken, and M. Schlichenmaier, *Toeplitz quantization of Kähler manifolds and* $\mathrm{gl}(N)$, $N \to \infty$ *limits*, Comm. Math. Phys. **165** (1994), no. 2, 281–296.

[17] D. Borthwick, T. Paul, and A. Uribe, *Legendrian distributions with applications to relative Poincaré series*, Invent. Math. **122** (1995), no. 2, 359–402.

[18] ———, *Semiclassical spectral estimates for Toeplitz operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 4, 1189–1229.

[19] D. Borthwick and A. Uribe, *Almost complex structures and geometric quantization*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 6, 845–861.
[20] T. Bouche, *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), no. 1, 117–130.
[21] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Mathematics Studies, vol. 99, Princeton University Press, Princeton, NJ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.
[22] L. Boutet de Monvel and J. Sjöstrand, *Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö*, Journées: Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975), Soc. Math. France, Paris, 1976, pp. 123–164. Astérisque, No. 34–35.
[23] M. Cahen, S. Gutt, and J. Rawnsley, *Quantization of Kähler manifolds. I. Geometric interpretation of Berezin's quantization*, J. Geom. Phys. **7** (1990), no. 1, 45–62.
[24] D. Catlin, *The Bergman Kernel and a Theorem of Tian*, Analysis and Geometry in Several Complex Variables, Trends in Mathematics, Birhauser, Boston, 1999, pp. 1–23.
[25] L. Charles, *Quasimodes and Bohr-Sommerfeld conditions for the Toeplitz operators*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), no. 9-10, 1527–1566. MR 2001172
[26] ———, *Symbolic calculus for Toeplitz operators with half-form*, J. Symplectic Geom. **4** (2006), no. 2, 171–198.
[27] ———, *Semi-classical properties of geometric quantization with metaplectic correction*, Comm. Math. Phys. **270** (2007), no. 2, 445–480.
[28] ———, *A Lefschetz fixed point formula for symplectomorphisms*, J. Geom. Phys. **60** (2010), no. 12, 1890–1902.
[29] ———, *Asymptotic properties of the quantum representations of the mapping class group*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 10, 7507–7531.
[30] ———, *Quantization of compact symplectic manifolds*, J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 4, 2664–2710.
[31] L. Charles and Y. Le Floch, *Quantum propagation for Berezin-Toeplitz operators*, Arxiv e-print (2020), arxiv:2009.05279.
[32] L. Charles and L. Polterovich, *Sharp correspondence principle and quantum measurements*, Algebra i Analiz **29** (2017), no. 1, 237–278.
[33] X. Dai, K. Liu, and X. Ma, *On the asymptotic expansion of Bergman kernel*, J. Differential Geom. **72** (2006), no. 1, 1–41.
[34] T. Darvas and Y. Rubinstein, *Tian's properness conjectures and Finsler geometry of the space of Kähler metrics*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), no. 2, 347–387.
[35] M. De Wilde and P. Lecomte, *Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), no. 6, 487–496.
[36] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings. I*, J. Differential Geom. **59** (2001), no. 3, 479–522.
[37] ———, *Scalar curvature and projective embeddings. II*, Q. J. Math. **56** (2005), no. 3, 345–356.

[38] ______, *Some numerical results in complex differential geometry*, Pure Appl. Math. Q. **5** (2009), no. 2, Special Issue: In honor of Friedrich Hirzebruch. Part 1, 571–618.

[39] M. Engliš, *A Forelli-Rudin construction and asymptotics of weighted Bergman kernels*, J. Funct. Anal. **177** (2000), no. 2, 257–281.

[40] B. Fedosov, *Deformation quantization and index theory*, Mathematical Topics, vol. 9, Akademie Verlag, Berlin, 1996.

[41] J. Fine, *Quantization and the Hessian of Mabuchi energy*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 14, 2753–2798.

[42] T. Foth, *Bohr-Sommerfeld tori and relative Poincaré series on a complex hyperbolic space*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), no. 1, 151–175.

[43] T. Foth and S. Katok, *Spanning sets for automorphic forms and dynamics of the frame flow on complex hyperbolic spaces*, Ergodic Theory Dynam. Systems **21** (2001), no. 4, 1071–1099.

[44] R. Gelca and A. Uribe, *The Weyl quantization and the quantum group quantization of the moduli space of flat SU(2)-connections on the torus are the same*, Comm. Math. Phys. **233** (2003), 493–512.

[45] W. M. Goldman, *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. in Math. **54** (1984), no. 2, 200–225.

[46] V. Guillemin, *Star products on compact pre-quantizable symplectic manifolds*, Lett. Math. Phys. **35** (1995), no. 1, 85–89.

[47] V. Guillemin, V. Ginzburg, and Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 98, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, Appendix J by Maxim Braverman.

[48] V. Guillemin, E. Lerman, and S. Sternberg, *Symplectic fibrations and multiplicity diagrams*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[49] V. Guillemin and S. Sternberg, *Geometric quantization and multiplicities of group representations*, Invent. Math. **67** (1982), 515–538.

[50] ______, *The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 1, 106–128.

[51] V. Guillemin and A. Uribe, *The Laplace operator on the n-th tensor power of a line bundle: eigenvalues which are uniformly bounded in n*, Asymptotic Anal. **1** (1988), no. 2, 105–113.

[52] J.H. Hannay and M.V. Berry, *Quantization of linear maps on a torus-fresnel diffraction by a periodic grating*, Physica D: Nonlinear Phenomena **1** (1980), no. 3, 267–290.

[53] Harish-Chandra, *On some applications of the universal enveloping algebra of a semisimple Lie algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 28–96.

[54] N. J. Hitchin, *Flat connections and geometric quantization*, Comm. Math. Phys. **131** (1990), no. 2, 347–380.

[55] L. Ioos, B. Delarue, and P. Ramacher, *A Riemann-Roch formula for singular reductions by circle actions*, Arxiv e-print (2023), arxiv:2302.09894.

[56] L. C. Jeffrey, *Chern-Simons-Witten invariants of lens spaces and torus bundles, and the semiclassical approximation*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), no. 3, 563–

604.
[57] A. V. Karabegov and M. Schlichenmaier, *Identification of Berezin-Toeplitz deformation quantization*, J. Reine Angew. Math. **540** (2001), 49–76.
[58] S. Katok, *Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms*, Invent. Math. **80** (1985), no. 3, 469–480.
[59] D. Kazhdan, *On ε-representations*, Israel J. Math. **43** (1982), 315–323.
[60] J. Keller, J. Meyer, and R. Seyyedali, *Quantization of the Laplacian operator on vector bundles, I*, Math. Ann. **366** (2016), no. 3-4, 865–907.
[61] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.
[62] B. Kostant, *Quantization and unitary representations. I. Prequantization*, Lectures in Modern Analysis and Applications, III, Lecture Notes in Math., vol. 170, Springer, Berlin-New York, 1970, pp. 87–208.
[63] G. Lebeau and L. Michel, *Semi-classical analysis of a random walk on a manifold*, Ann. Probab. **38** (2010), no. 1, 277–315.
[64] A. Lichnerowicz, *Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte*, Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 427–437.
[65] K. Liu and X. Ma, *A remark on: "Some numerical results in complex differential geometry" [arxiv.org/abs/math/0512625] by S. K. Donaldson*, Math. Res. Lett. **14** (2007), no. 2, 165–171.
[66] W. Lu, X. Ma, and G. Marinescu, *Donaldson's Q-operators for symplectic manifolds*, Sci. China Math. **60** (2017), no. 6, 1047–1056.
[67] X. Ma and G. Marinescu, *The Spin^c Dirac operator on high tensor powers of a line bundle*, Math. Z. **240** (2002), no. 3, 651–664.
[68] ———, *The first coefficients of the asymptotic expansion of the Bergman kernel of the Spin^c Dirac operator*, Internat. J. Math. **17** (2006), no. 6, 737–759.
[69] ———, *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, Progress in Mathematics, vol. 254, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
[70] ———, *Generalized Bergman kernels on symplectic manifolds*, Adv. Math. **217** (2008), no. 4, 1756–1815.
[71] ———, *Toeplitz operators on symplectic manifolds*, J. Geom. Anal. **18** (2008), no. 2, 565–611.
[72] ———, *Berezin-Toeplitz quantization on Kähler manifolds*, J. Reine Angew. Math. **662** (2012), 1–56.
[73] X. Ma and W. Zhang, *Superconnection and family Bergman kernels*, Math. Ann. **386** (2023), no. 3–4, 2207–2253.
[74] T. Mabuchi, *Stability of extremal Kähler manifolds*, Osaka J. Math. **41** (2004), no. 3, 563–582.
[75] Y. Matsushima, *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 145–150.
[76] E. Meinrenken and R. Sjamaar, *Singular reduction and quantization*, Topology **38** (1999), no. 4, 699–762.
[77] E. Meinrenken and C. Woodward, *Canonical bundles for Hamiltonian loop group manifolds*, Pacific J. Math. **198** (2001), no. 2, 477–487.

[78] P.-E. Paradan, *Localization of the Riemann-Roch character*, J. Funct. Anal. **187** (2001), no. 2, 442–509.
[79] D. H. Phong and J. Sturm, *Scalar curvature, moment maps, and the Deligne pairing*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 3, 693–712.
[80] L. Polterovich, *Quantum unsharpness and symplectic rigidity*, Lett. Math. Phys. **102** (2012), 245–264.
[81] J. H. Rawnsley, *Coherent states and Kähler manifolds*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 403–415.
[82] M. A. Rieffel, *Non-commutative tori – a case study of non-commutative differentiable manifolds*, Contemporary Math. **105** (1990), 191–211.
[83] W.-D. Ruan, *Canonical coordinates and Bergmann [Bergman] metrics*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), no. 3, 589–631.
[84] Y. Sano and C. Tipler, *A moment map picture of relative balanced metrics on extremal Kähler manifolds*, J. Geom. Anal. **31** (2021), no. 6, 5941–5973.
[85] M. Schlichenmaier, *Deformation quantization of compact Kähler manifolds by Berezin-Toeplitz quantization*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II (Dijon), Math. Phys. Stud., vol. 22, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 289–306.
[86] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 421–577.
[87] R. Seyyedali, *Relative chow stability and extremal metrics*, Adv. Math. **316** (2017), 770–805.
[88] B. Shiffman and S. Zelditch, *Asymptotics of almost holomorphic sections of ample line bundles on symplectic manifolds*, J. Reine Angew. Math. **544** (2002), 181–222.
[89] J.-M. Souriau, *Structure des systèmes dynamiques*, Maîtrises de mathématiques, Dunod, Paris, 1970.
[90] R. Takahashi, *Asymptotic stability for Kähler-Ricci solitons*, Math. Z. **281** (2015), no. 3-4, 1021–1034.
[91] ———, *Geometric quantization of coupled Kähler-Einstein metrics*, Anal. PDE **14** (2021), no. 6, 1817–1849.
[92] G. Tian, *On a set of polarised Kähler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geom. **32** (1990), no. 1, 99–130.
[93] G. Tian and X. Zhu, *Uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Acta Math. **184** (2000), no. 2, 271–305.
[94] ———, *A new holomorphic invariant and uniqueness of Kähler-Ricci solitons*, Comment. Math. Helv. **77** (2002), no. 2, 297–325.
[95] H. Tsuji, *Dynamical construction of Kähler-Einstein metrics*, Nagoya Math. J. **199** (2010), 107–122.
[96] G. M. Tuynman, *Quantization: towards a comparison between methods*, J. Math. Phys. **28** (1987), no. 12, 2829–2840.
[97] X. Wang, *Canonical metrics on stable vector bundles*, Comm. Anal. Geom. **13** (2005), no. 2, 253–285.
[98] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys.

121 (1989), no. 3, 351–399.

[99] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 339–411.

[100] S. Zelditch, *Szegö kernels and a theorem of Tian*, Int. Math. Res. Not. IMRN **6** (1998), 317–331.

[101] W. Zhang, *Holomorphic quantization formula in singular reduction*, Commun. Contemp. Math. **1** (1999), no. 3, 281–293.